9). Ensembles limites.

Motivation : on utilise les résultats des exercices 72 et 73.

Exemple 1 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, de classe C^1, $f > 0$ sur $[0;1[$, $f < 0$ sur $]1;+\infty[$ et $f(1) = 0$.
(par ex. : $f(u) = 1 - u$).

cf. Ex 72

Soit $v_f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$z \longmapsto (f(|z|^2) + i) z.$$

v_f est C^1. Le seul zéro de v_f est 0.

Soit $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$ et $\omega : J_\omega \to \mathbb{C}$ la sol. max. de l'éq. diff. associée à v_f valant ω_0 à $t = 0$.

On vérifie que ω ne s'annule pas. De plus,

$$\forall t \in J_\omega : \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\omega}{|\omega|}\right)(t) = i \frac{\omega}{|\omega|}(t).$$

Donc

$$\forall t \in J_\omega, \quad \frac{\omega}{|\omega|}(t) = e^{it} \frac{\omega_0}{|\omega_0|}.$$

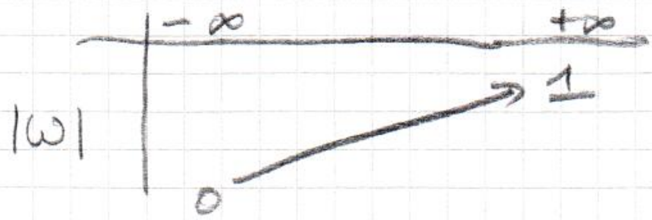
De plus,

$$\forall t \in J_\omega, \left(\frac{d}{dt}|\omega|^2\right)(t) = 2 f(|\omega|^2)\, |\omega|^2$$

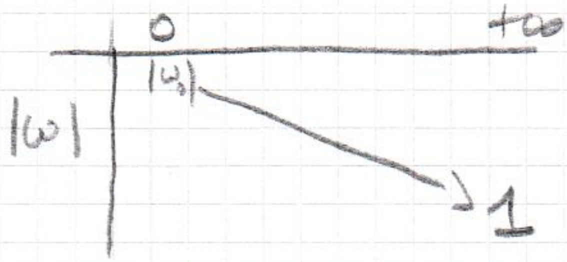
donc $|\omega|^2$ est sol. de l'éq. $u' = 2 f(u) u$.
Grâce à l'étude de cette éq. différ., on obtient les résultats suivants :

1^er cas : $|\omega_0| = 1$. Alors $J_\omega = \mathbb{R}$ et pour $t \in \mathbb{R}$, $\omega(t) = \omega_0 e^{it}$.
ω est 2π-périodique.

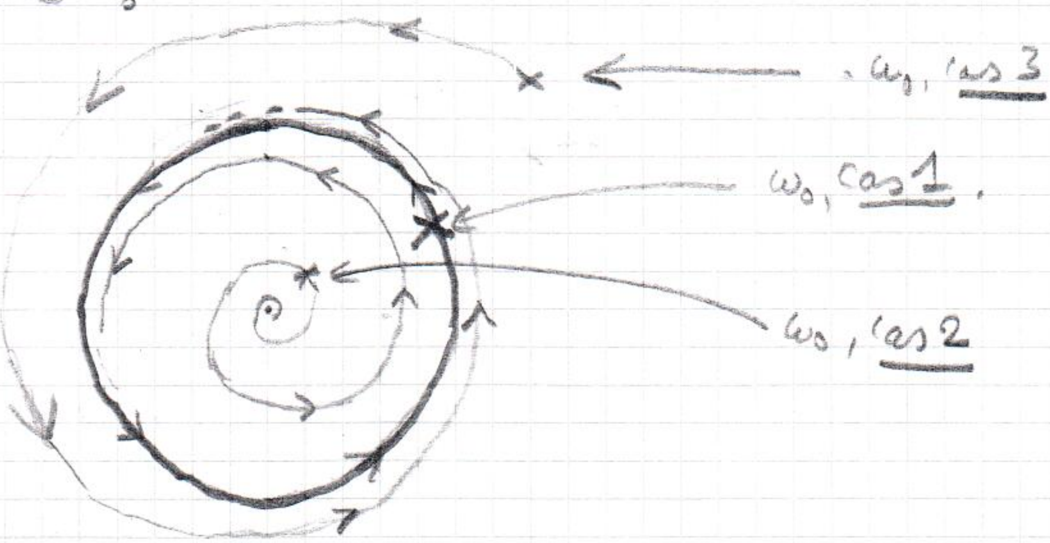
<u>2ème cas</u> : $0 < |\omega_0| < 1$. On a $J_\omega = \mathbb{R}$, $|\omega|$ est str. $\nearrow$; $\lim\limits_{-\infty} |\omega| = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} |\omega| = 1$.



<u>3ème cas</u> : $1 < |\omega_0|$. On a $\sup J_\omega = +\infty$ et $|\omega|$ est str. $\searrow$ sur $[0 ; +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{+\infty} |\omega| = 1$.



On a donc :



<u>Rq</u> : Si $0 < |\omega_0| < 1$, $\lim\limits_{-\infty} \omega = 0$, pt. d'équilibre de v_f.

mais $\lim\limits_{+\infty} \omega$ n'existe pas.

Si $1 < |\omega_0|$, $\lim\limits_{+\infty} \omega$ n'existe pas.

En revanche, dans les cas, la solution devient "proche" de la sol. du cas 1 qd $t \to +\infty$.

On verra que la trajectoire du cas 1 sera un "ensemble limite" pour les trajectoires des cas 2 et 3, lorsque $t \to +\infty$.

Rq. : Dans les cas 2 et 3, on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $t_0 \in [0;+\infty[$ tq. $\omega(t_0) = |\omega(t_0)| e^{i\theta}$ et
$$\lim_{n \to \infty} \omega(t_0 + 2n\pi) = e^{i\theta}.$$
(car $\lim_{t \to +\infty} |\omega| = 1$ et $\frac{\omega}{|\omega|}$ est 2π-périodique, dans les 2 cas.)

Exemple 2 : $\boxed{\text{cf. Ex. 73}}$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, de classe C^1, $f > 0$ sur $[0;1[$, $f < 0$ sur $]1;+\infty[$, $f(1) = 0$ et tq. $\frac{1}{f^2}$ soit intég. près de 1.

Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ et
$$w_f : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}$$
$$(z;s) \longmapsto \left(v_f(z) ; \frac{s}{f(|z|^2)} \right).$$

Soit $(\omega_0 ; \rho_0) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ avec $\omega_0 \neq 0$ et $\rho_0 > 0$.
Soit $y = (\omega ; \rho) : J \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ la sol. max. de l'éq. associée à w_f valant $(\omega_0 ; \rho_0)$ à $t = 0$.

On vérifie que $\sup J = +\infty$, que ω est une restriction à J d'une sol. max. $\hat{\omega}$ de v_f et que
$$\forall t \geq 0, \quad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(\int_0^t \frac{du}{f(|\omega(u)|^2)} \right).$$

On a donc $\lim_{t\to+\infty} |w| = 1$ et
$\forall t \geq 0, \quad \frac{w}{|w|}(t) = e^{it} \frac{w_0}{|w_0|}$.

De plus, pour $t \geq 0$,

$$\int_0^t \frac{du}{f(|w(u)|^2)} = \int_0^t \frac{2f(|w(u)|^2)\,|w(u)|^2 du}{|w(u)|^2 \left[f(|w(u)|^2)\right]^2}$$

$$= \int_0^t \frac{\left(\frac{d}{du}|w|^2\right)(u)}{|w(u)|^2\left[f(|w(u)|^2)\right]^2} = \int_{|w_0|^2}^{|w(t)|^2} \frac{ds}{s f(s)^2}.$$

Comme $\frac{1}{f^2}$ est intég. près de 1, $\frac{1}{sf^2(s)}$ aussi
Comme $\lim_{+\infty} |w| = 1$, $\lim_{+\infty} \rho = \rho_0 \exp\left(\int_{|w_0|}^{1} \frac{ds}{sf(s)^2}\right)$

$$=: \rho_\infty(|w_0|).$$

Pour le t_0 défini précédemment, on a

$$\lim_{n\to\infty} y(t_0 + 2n\pi) = (e^{i\theta}; \rho_\infty(|w_0|)).$$

L'ensemble $\{(e^{i\theta}; \rho_\infty(|w_0|));\ \theta \in \mathbb{R}\}$
va être un "ensemble limite" pour y qd. $t\to+\infty$.

Déf. : Soit $(F, \|\cdot\|)$ un Banach, V un ouv. de F et $v : V \to F$ de classe C^1 + C.L.
Soit $x \in V$ et $\ell \in \overline{V}$. On dit que ℓ est un point positivement limite (ou ω-limite) de x s'il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (J_x \cap [0;+\infty[)^{\mathbb{N}}$ tq.

$$\begin{cases} t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup J_x \\ \text{et} \\ \varphi(t_n; x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell. \end{cases}$$

On dit que l est un point négativement limite (ou α-limite) de x s'il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (J_x \cap]-\infty; 0])^{\mathbb{N}}$ tq.

$$\begin{cases} t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf J_x \\ \text{et} \quad \varphi(t_n; x) \xrightarrow[n\to\infty]{} l. \end{cases}$$

Rq. : * Si l est "≥ 0" limite pour x et v alors l est "≤ 0" limite pour x et $-v$.

* l est "≥ 0" limite pour x et v ssi il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (J_x \cap [0; +\infty[)^{\mathbb{N}}$ tq.

$$\begin{cases} (t_n)_n \text{ est } \nearrow, \ \lim t_n = \sup J_x \\ \text{et} \quad \lim_n \varphi(t_n; x) = l. \end{cases}$$

Même chose dans le cas "≤ 0" limite.

* Dans l'exemple 1, on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ est un pt. "≥ 0" limite de z avec $0<|z|<1$.

On remarque que $\sup J_z = +\infty$,

* Dans l'exemple 2, on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta}; \rho_\infty(|z|))$ est pt. "≥ 0" limite de $(z; \rho_0) =: w$ si $0<|z|<1$ et $\rho_0 > 0$, là aussi $\sup J_w = +\infty$.

Prop. 1 : Dans le cadre de la déf. précédente soit $l \in \overline{V}$ un point "≥ 0" (resp. "≤ 0") limite de $x \in V$ alors

$$l \in V \implies \sup J_x = +\infty$$
$$(\text{resp. } \inf J_x = -\infty)$$

__Preuve :__ on s'inspire de la preuve de la prop. 1 (para. 4). On traite le cas "≥ 0" limite seulement.

On suppose que $l \in V$. On montre par l'absurde que $b_+ = \sup J_x = +\infty$.

On suppose donc $b_+ \in \mathbb{R}$. Comme $(b_+ ; l) \in \mathbb{R} \times V$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq. $\varphi_{(b_+ ; l)}$ soit définie sur $[b_+ - \varepsilon_0 ; b_+ + \varepsilon_0]$.
Par le cor. 1 (para. 4), il existe I_0 voisi. de b_+ et V_0 voisi. de l tq. pour $(z ; r) \in I_0 \times V_0$, $\varphi_{(z ; r)}$ soit définie sur $[b_+ - \varepsilon_0 ; b_+ + \varepsilon_0]$.
Comme l est pt. "≥ 0" limite de x, il existe $t_1 \in J_x \cap [0 ; +\infty[$ tq. $\varphi(t_1 ; x) \in V_0$. Comme $\varphi_{(t_1 ; \varphi(t_1 ; x))}$ et $\varphi(\cdot ; x)$ coïncident en t_1, elles sont égales par C.L. donc $[b_+ - \varepsilon_0 ; b_+ + \varepsilon_0] \subset J_x$. Contr. avec la déf. de b_+. $\square$.

__Déf.__ : Dans le cadre de la déf. précédente, soit $x \in V$. On pose

$\mathcal{L}^+(x) = \{ l \in \overline{U} ; l$ est "≥ 0" limite de $x \}$ et $L^+(x) = \mathcal{L}^+(x) \cap V$,

$\mathcal{L}^-(x) = \{ l \in \overline{U} ; l$ est "≤ 0" limite de $x \}$ et $L^-(x) = \mathcal{L}^-(x) \cap V$.

Un ensemble $E \subset \overline{U}$ est un ensemble "≥ 0" (resp. "≤ 0") limite de v s'il existe $x \in E$ tq. $E = \mathcal{L}^+(x)$ (resp. $\mathcal{L}^-(x)$).

__Rq__ : * Si $\lim\limits_{\substack{t \to \sup J_x \\ (\inf J_x)}} \varphi(t ; x) = l \in \overline{U}$ alors $\{l\} = \mathcal{L}^+(x)$ $(\mathcal{L}^-(x))$.

* Si $l \in L^{\pm}(x)$ alors $\sup J_x = +\infty$ $(\inf J_x = -\infty)$ (cf. prop. 1).

* Si $a \in V$ et $v(a) = 0$ alors $L^+(a) = L^-(a) = \mathcal{L}^+(a) = \mathcal{L}^-(a) = \{a\}$.

__Prop. 2__ : Dans le cadre précédent, si $(x, x') \in V^2$ et x et x' appartiennent à la m. traj. de v alors $\mathcal{L}^{\pm}(x) = \mathcal{L}^{\pm}(x')$.

Preuve : on traite le cas + seulement.

Il suffit de montrer que $\mathcal{L}^+(x') \subset \mathcal{L}^+(x)$ (car en échangeant les rôles de x et x', on obtient $\mathcal{L}^+(x) \subset \mathcal{L}^+(x')$).

Comme $x' \in \mathcal{C}(x)$, il existe $t' \in J_x$ t.q. $x' = \varphi(t'; x)$.

Soit $y \in \mathcal{L}^+(x')$. Il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (J_{x'} \cap [0; +\infty[)^{\mathbb{N}}$ t.q. $t_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \sup J_{x'}$ et $\varphi(t_n; x') \xrightarrow[n \to \infty]{} y$. On sait que

$J_{x'} + t' = J_x$ et $\varphi(\cdot + t', x) = \varphi(\cdot\,; \varphi(t'; x))$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n + t' \in J_x$ et $\varphi(t_n + t'; x) = \varphi(t_n; x') \xrightarrow[n \to \infty]{} y$.

Comme $t_n + t' \to \sup J_x$, $y \in \mathcal{L}^+(x)$. $\square$

Prop. 3 : Dans le cadre précédent, pour $x \in V$, $\mathcal{L}^{\pm}(x)$ est un fermé de F et $L^{\pm}(x)$ est un fermé de $\mathbf{V}$. De plus, $L^{\pm}(x)$ est stable par le flot de v : $\forall y \in L^{\pm}(x), \forall t \in J_y, \varphi(t; y) \in L^{\pm}(x)$.

Preuve : on traite le cas + seulement. Soit $x \in V$. Soit $(y_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^+(x)^{\mathbb{N}}$ t.q. $y = \lim y_p$ existe dans $\mathbf{F}$ (donc dans $\overline{V}$).

Par hyp., pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(t_{n;p})_{n \in \mathbb{N}} \in (J_x \cap [0; +\infty[)^{\mathbb{N}}$ t.q. $(t_{n;p})_n \nearrow \sup J_x$ et $\varphi(t_{n;p}; x) \xrightarrow[n \to \infty]{} y_p$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ il existe $n_p \in \mathbb{N}$ t.q.

$$t_{n_p;p} > (\sup J_x) - \frac{1}{p} \quad \text{si } \sup J_x < \infty,$$
$$\qquad > p \qquad\qquad \text{si } \sup J_x = +\infty,$$

et t.q. $\|\varphi(t_{n_p;p}; x) - y_p\| < \frac{1}{p}$.

Donc, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\varphi(t_{n_p;p}; x) - y\| \leq \|\varphi(t_{n_p;p}; x) - y_p\| + \|y_p - y\|$$
$$\leq \frac{1}{p} + \|y_p - y\| \xrightarrow[p \to \infty]{} 0.$$

Donc, par le Th. des gendarmes, $y = \lim_{p \to \infty} \varphi(t_{n_p;p}; x)$ et $y \in \mathcal{L}^+(x)$.

Comme $L^+(x) = \mathcal{L}^+(x) \cap V$ et $\mathcal{L}^+(x)$ est fermé, $L^+(x)$ est un fermé de V.

Soit $y \in L^+(x)$ et $t \in J_y$. Par la prop. 1, $\sup J_x = +\infty$.

De plus, il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (J_x \cap [0;+\infty[)^{\mathbb{N}}$ tq. $t_n \to +\infty$ et $\varphi(t_n;x) \to y$. Pour n assez gd, $t_n + t \in [0;+\infty[$ et $t \in J_{\varphi(t_n;x)}$ et $\varphi(t_n+t;x) = \varphi(t;\varphi(t_n;x))$.
Par conti. du flot,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t;\varphi(t_n;x)) = \varphi(t;y).$$

Donc $\varphi(t;y) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n+t;x)$ avec $0 \leq t_n+t \to +\infty$ donc $\varphi(t;y) \in \mathcal{L}^+(x)$. Or $\varphi(t;y) \in V$ donc $\varphi(t;y) \in L^+(x)$. $\square$

<u>Prop. 4</u> : Dans le cadre précédent, soit A un fermé de V tq. pour tout $a \in A$, $[0;+\infty[\subset J_a$ et, pour tout $t \geq 0$, $\varphi(t;a) \in A$ (on dit que A est "≥ 0" ~~stable~~ invariant par le flot de v). Alors, pour tout $a \in A$, $\mathcal{L}^+(a) \subset A$.

<u>Rq.</u> : on a bien sûr un résultat similaire pour A "≤ 0" invariant par le flot de v.

<u>Preuve</u> : Soit $a \in A$ et $y \in \mathcal{L}^+(a)$. Il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (J_a \cap [0;+\infty[)^{\mathbb{N}}$ tq. $t_n \to \sup J_a$ et $\varphi(t_n;a) \to y$. Comme $(\varphi(t_n;a))_n$ est une suite cv. d'élé. du fermé A, sa limite appartient à A. Donc $y \in A$. $\square$.

<u>Cor. 1</u> : Dans le cadre précédent, soit $x \in V$ tq. $\varphi(\cdot;x)$ est périodique. Alors $\mathcal{L}^+(x) = L^+(x) = L^-(x) = \mathcal{L}^-(x) = \mathcal{C}(x)$, la trajectoire de x.

<u>Preuve</u> : Soit $T > 0$ une période de $\alpha = \varphi(\cdot;x)$. On a $\mathcal{C}(x) = \operatorname{Im}\alpha = \alpha([0;T])$, l'image d'un compact par une appl. conti. Donc $\mathcal{C}(x)$ est compact, donc fermé. De plus, $\mathcal{C}(x)$ est "≥ 0" et "≤ 0" invariant par le flot puisque, si $y = \alpha(t_0)$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t;y) = \alpha(t+t_0) \in \mathcal{C}(x)$.

Par la prop. 4, $\mathcal{L}^{\pm}(x) \subset \mathcal{C}(x)$.
En particulier, comme $\mathcal{C}(x) \subset V$, $\mathcal{L}^{\pm}(x) = L^{\pm}(x)$.
Soit $a \in \mathcal{C}(x)$. Il existe $t_a \in \mathbb{R}$ tq. $a = \varphi(t_a ; x)$.
Comme $t_a \pm nT \xrightarrow[n \to \infty]{} \pm\infty$ et $\varphi(t_a \pm nT) = a$, pour tout n, $a \in L^{\pm}(x)$. D'où $\mathcal{C}(x) \subset L^{\pm}(x)$.
Concl. : $L^+(x) = \mathcal{L}^+(x) = \mathcal{L}^-(x) = L^-(x) = \mathcal{C}(x)$. $\square$.

<u>Déf.</u> : Une orbite périodique non ponctuelle $\mathcal{C}$ de v tq.

- $\exists x \in V \setminus \mathcal{C}$; $\mathcal{C} \subset L^+(x)$ (resp. $L^-(x)$)

est un cycle "≥ 0" (resp. "≤ 0") limite de v.

<u>Exemple</u> : dans l'exemple 1, le cercle unité centré en 0 est la traj. du point $w_0 \in \mathbb{C}$ avec $|w_0| = 1$ et il est contenu dans $L^+(w_0)$, pour tout $0 < |w_0| < 1$, et dans $L^-(w_0)$, pour tout $|w_0| > 1$. Il est donc un cycle "≥ 0" limite <u>et</u> un cycle "≤ 0" limite de v_f.

Th. (Poincaré – Bendixon)
Dans le cadre précédent avec $F = \mathbb{R}^2$, soit $x \in V$ tq. $L^+(x)$ soit un compact non vide sans point d'équilibre (i.e. sans zéro de v). Alors $L^+(x)$ est une orbite non ponctuelle de v et, si $x \notin L^+(x)$, c'est un cycle "≥ 0" limite de v.

<u>Preuve</u> : admise.