Université de Cergy-Pontoise.

M1, Contrôle continu de systèmes dynamiques, 21 novembre 2018 (1h 15 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Cours (2 pts) : Compléter l'énoncé suivant du théorème des bouts :

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et V un ouvert de E. Soit $f : I \times V \longrightarrow E$ .... Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in V$ et $\alpha : J \longrightarrow V$ la solution maximale de l'équation $y' = f(t; y)$ valant y_0 en $t = t_0$. On a :

1. ....
2. ....

Exercice 1. : (4 pts). Soit (L) l'équation différentielle d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $Y' = AY$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire $A = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente de sorte que $DN = ND$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tA)$.
3. Pour Y_0 de coordonnées $(a_1; a_2; a_3)$ dans la base canonique $(e_1; e_2; e_3)$, déterminer explicitement les coordonnées dans cette base de la solution maximale de (L) valant Y_0 en $t = 0$.

Exercice 2. : (6 pts). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (N) l'équation différentielle d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $Y' = t^{-1}\|Y\| \cdot Y$ sur $]0; +\infty[\times\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que (N) satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Soit $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la solution maximale de (N) valant $Y_1 \neq 0$ en $t = 1$. Vérifier que Y ne s'annule jamais.
3. Déterminer explicitement la fonction $J \ni t \mapsto \|Y\|^{-1}$.
(Indication : on pourra calculer sa dérivée.)
4. En déduire que $J \cap [1; +\infty[\subset [1; a_1[$, où $a_1 = \exp(\|Y_1\|^{-1})$.
5. Montrer que $J \cap [1; +\infty[= [1; a_1[$.
6. Montrer que $J\cap]0; 1] =]0; 1]$.

Exercice 3. : (9 pts). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note par $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre sur $\mathbb{K}$ des applications linéaires sur E et par $\mathcal{GL}(E)$ le groupe des applications linéaires inversibles sur E. On note par I l'application identique sur E. Pour $A, B \in \mathcal{L}(E)$, on note $[A, B] = AB - BA$. On rappelle qu'une application linéaire M sur E est une projection si $M^2 = M$.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de 0. Soit $P : J \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ de classe C^2 et à valeurs projection. On veut construire une application $U : J \longrightarrow \mathcal{GL}(E)$ de classe C^1 telle que

$$\forall t \in J\,, \quad P(t) \;=\; U(t) \cdot P(0) \cdot U(t)^{-1}\,. \tag{1}$$

Soit $Q : J \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ donnée par $Q = [P', P]$, P' désignant la dérivée de P. Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) l'équation différentielle linéaire d'inconnue $X : J \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ donnée par $X' = QX$ (resp. $X' = -XQ$).
On rappelle que, si $A, B : J \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ sont dérivables, alors AB est dérivable et, pour tout $t \in J$, $(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$.

1. Montrer que, sur J, $PP'P = 0$.
2. Montrer que, sur J, $PQ = -PP'$, $QP = P'P$ et $P' = [Q, P]$.
3. Soit U la solution de l'équation $\mathcal{E}$ telle que $U(0) = I$. Soit V la solution de l'équation $\mathcal{F}$ telle que $V(0) = I$. Montrer que, sur J, $VU = I$.
4. En déduire que $U : J \longrightarrow \mathcal{GL}(E)$. Que vaut U^{-1} ?
5. Montrer que PU et $UP(0)$ sont solutions de $\mathcal{E}$.
6. En déduire que U satisfait (1).
7. Soit $\theta : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. Pour $t \in J$, soit $v(t) = (\cos\theta(t))e_1 + (\sin\theta(t))e_2$, $(e_1; e_2)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $P(t)$ la projection orthogonale donnée par

$$E \ni w \;\mapsto\; \langle v(t); w\rangle\, v(t)\,,$$

$\langle\cdot;\cdot\rangle$ désignant le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^2$. P est bien de classe C^2.
a). Vérifier que, pour $t \in J$, la matrice de $Q(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\theta'(t)\sigma$, où

$$\sigma \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b). En déduire que la fonction $U : J \longrightarrow \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$ définie au 3 est telle que, pour tout $t \in J$, $U(t)$ est une rotation de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

Fin de l'épreuve.

Université de Cergy-Pontoise, Calcul intégral, M1, Systèmes dynamiques.
Corrigé du contrôle continu du ? ? novembre 2018.

Exercice 1 : (4 pts).

1. 1 pt.
2. 1,5 pt.
3. 1,5 pt.

Exercice 2 : (6 pts).

1. 2 pts.
2. 0,5 pt.
3. 1 pt.
4. 0,5 pt.
5. 1 pt.
6. 1 pt.

Exercice 2 : (9 pts).

1. 0,5 pt.
2. 1,5 pts.
3. 0,5 pt.
4. 1 pt.
5. 2 pts.
6. 1,5 pt.
7. a) : 1 pt. b). 1 pt.