Université de Cergy-Pontoise.

M1, Examen de systèmes dynamiques, 19 décembre 2018 (3h).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

À l'exception d'une feuille A4 manuscrite et nominative, les documents sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice ou un problème, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées.

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, le tout déployé sur quatre pages.

Note sur 20 : (nombre de points)/2. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (7 pts). Soit (L) l'équation différentielle d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{C}^4$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $Y' = AY$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A a quatre valeurs propres distinctes.
2. Donner une base de l'ensemble des solutions de (L).
3. Soit Y_0 le vecteur colonne donné par $(1; i; 0; 0)^T$, où T désigne la transposition, et Y la solution maximale de (L) valant Y_0 à $t = 0$. A-t-on $\lim\limits_{t \to +\infty} Y(t) = 0$?
4. Montrer que 0 n'est pas attractif pour (L).
5. Donner un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{C}^4$ de dimension 2 tel que 0 soit attractif pour la restriction (L_V) de (L) à V.

Exercice 2. : (11 pts). Soit $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ le champ de vecteur donné par

$$v(x;y) \;=\; \left(\frac{-4y}{x^2+4y^2}\,;\,\frac{x}{x^2+4y^2}\right)$$

sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction C^1 donnée par $g(x;y) = x^2+4y^2$.

1. Montrer que l'équation différentielle associé à v satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R} \times U$.
2. Montrer que g est une intégrale première de v. Montrer que, pour tout $d > 0$, $g^{-1}(\{d\})$ est un compact inclu dans U.
3. Soit $X_0 = (a_0;b_0) \in U$. Soit $X : J \longrightarrow U$ la solution maximale de v valant X_0 à $t = 0$. Soit $a, b : J \longrightarrow \mathbb{R}$ ses applications coordonnées c'est-à-dire vérifiant, pour tout $t \in J$, $X(t) = (a(t);b(t))$.
   a). Montrer que $J = \mathbb{R}$.
   b). Montrer que l'ensemble limite $L^+(X_0)$ est un compact non vide inclu dans $g^{-1}(\{g(X_0)\})$.
   c). En déduire que $L^+(X_0)$ est une trajectoire périodique de v.
   d). Montrer que $L^+(X_0) = g^{-1}(\{g(X_0)\})$. (Indication : on pourra d'abord montrer que $L^+(X_0)$ est une courbe de Jordan.)

Problème.

(32 pts).

L'objet de ce problème est d'étudier l'équation différentielle non-linéaire (E) d'inconnue $z : I \longrightarrow \mathbb{C}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par

$$\forall t \in I\,, \quad z'(t) \;=\; (1/2)\cdot r(t)\cdot \big(z(t) \,-\, \overline{z(t)}\big)\cdot z(t)\,, \tag{1}$$

où $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et $\overline{c}$ désigne le complexe conjugué de $c \in \mathbb{C}$.

Le problème se décompose en trois partie. La première est consacrée à l'étude d'une équation différentielle réelle auxiliaire. La deuxième partie se concentre sur les propriétés des solutions de (E) lorsque r est arbitraire. Dans la troisième partie, la fonction r étant choisie constante égale à 1, on étudie les trajectoires et la nature des points d'équilibre de l'équation autonome (1).

Partie I.

(8 pts).

Dans cette partie, on se donne un réel $a > 0$ et une fonction continue $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. On étudie l'équation différentielle non-linéaire (F) d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par

$$\forall t \in I\,, \quad y'(t) \;=\; -r(t)\cdot \big(a^2 \,-\, y(t)^2\big)\,. \tag{2}$$

1. Montrer que l'équation (F) satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Soit $y_0 \in]-a; a[$ et $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (F) valant y_0 à $t = 0$. Vérifier que, pour tout $t \in J$, $|\alpha(t)| < a$.
3. En déduire que $J = \mathbb{R}$.
4. Montrer l'existence et la finitude des limites de α en $-\infty$ et $+\infty$.
5. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} \alpha = -a$ si et seulement si la fonction r n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \alpha = a$ si et seulement si la fonction r n'est pas intégrable sur $]-\infty; 0]$.

Partie II.

(13 pts).

Dans cette partie, on considère une fonction continue $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et on étudie l'équation différentielle non-linéaire (E) donnée par (1).

1. Montrer que l'équation (E) satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.
2. Soit $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une solution maximale de (E). Montrer que la fonction $|\gamma|$, où $|c|$ désigne le module de $c \in \mathbb{C}$, est constante sur J.
3. Montrer que la fonction $\Re\gamma$, où $\Re c$ désigne la partie réelle de $c \in \mathbb{C}$, est décroissante sur J.
4. Montrer que $J = \mathbb{R}$.
5. Montrer que la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \overline{\gamma(t)}$ est une solution maximale de l'équation (E).
6. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la partie imaginaire $\Im z_0$ de z_0 est strictement positive. Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la solution maximale de (E) valant z_0 à $t = 0$. Vérifier que $\Im\gamma$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
7. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-|z_0| < \Re\gamma(t) < |z_0|$.
8. Montrer que $\Re\gamma$ est solution de l'équation (F) de la partie I pour $a = |z_0|$.
9. Montrer l'existence des limites de γ en $-\infty$ et $+\infty$.
10. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} \gamma = -|z_0|$ si et seulement si la fonction r n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \gamma = |z_0|$ si et seulement si la fonction r n'est pas intégrable sur $]-\infty; 0]$.

Partie III.

(11 pts).

Dans cette partie, on poursuit l'étude de l'équation (E) donnée par (1) dans le cas où la fonction r est constante égale à 1. Dans ce cas, l'équation (E) est associée au champ de vecteurs $v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 qui, à $z \in \mathbb{C}$, associe $v(z) = (1/2)(z - \overline{z})z$.

1. Montrer que le champ v est complet.
2. Vérifier que $\mathbb{R} = \{x + 0i; x \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des points d'équilibre de v.
3. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que la trajectoire $\mathcal{C}(z_0)$ de z_0 est donnée par

$$\mathcal{C}(z_0) \;=\; \Big\{z \in \mathbb{C}; (\Im z) \cdot (\Im z_0) > 0\Big\} \cap \Big\{z \in \mathbb{C}; |z| = |z_0|\Big\}\,.$$

4. Montrer que la fonction "module" $|\cdot|$ est une intégrale première du champ v. Montrer que chaque courbe de niveau non nul de $|\cdot|$ est la réunion de quatre trajectoires de v.
5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Est-il (positivement) stable au sens de Lyapunov pour v ? Si oui, est-il attractif ? Justifier toute réponse.

Fin de l'épreuve.

Barème : Total : 50 pts.

Exercice 1 : 7 pts.

1. 1 pt.
2. 2 pts.
3. 1 pt.
4. 1 pt.
5. 2 pts.

Exercice 2 : 11 pts.

1. 2 pts.
2. 2 pts.
3. 7 pts. a) : 1,5 pts ; b) : 1,5 pts ; c) : 1 pt ; d) : 3 pts.

Problème : 32 pts.
Partie I : 8 pts.

1. 2,5 pts.
2. 1,5 pts.
3. 1 pt.
4. 1 pt.
5. 2 pts.

Partie II : 13 pts.

1. 2,5 pts.
2. 1,5 pts.
3. 1 pt.
4. 1 pt.
5. 0,5 pt.
6. 1,5 pts.
7. 1 pt.
8. 1 pt.
9. 1,5 pts.
10. 1,5 pts.

Partie III : 11 pts.

1. 1 pt.
2. 1 pt.
3. 3 pts.
4. 2 pts.
5. 4 pts.