Université de Cergy-Pontoise.

M1, Examen 2 de systèmes dynamiques, 25 juin 2019 (2h).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

À l'exception d'une feuille A4 manuscrite et nominative, les documents sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice ou un problème, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées.

L'épreuve comporte trois exercices indépendants déployés sur trois pages.
Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (3 pts).
Soit (L) l'équation différentielle d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $Y' = AY$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

1. Vérifier que A a trois valeurs propres distinctes.
2. Donner une base $(f_1; f_2; f_3)$ de l'ensemble des solutions de (L).

Exercice 2. : (14 pts).
On note par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Soit $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$w(x;y;z) = \big(a(x;y)x - y\,;\, x + a(x;y)y\,;\, -(1+a(x;y))z\big), \quad \text{où} \quad a(x;y) = 1 - \big(x^2+y^2\big) .$$

Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $Y' = w(Y)$. On verra que w est C^1 et, pour $Y_0 \in \mathbb{R}^3$, on notera par

$$\begin{array}{rccl} Y : & J & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & Y(t) = (x(t); y(t); z(t)) \end{array}$$

la solution maximale de (E) valant Y_0 en 0. On posera $b = \sup J$.
Soit (U) l'équation différentielle d'inconnue $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $u' = 2(u-1)u$.

1. Montrer que w est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. En particulier, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (U) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. Soit $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (E). Montrer que la fonction $\varphi : J \ni t \mapsto a(x(t); y(t))$ est solution de l'équation (U).
4. Soit $\sigma \in \{0; 1\}$ et $t_1 \in \mathbb{R}$. Déterminer explicitement la solution maximale u_σ de l'équation (U) vérifiant $u_\sigma(t_1) = \sigma$.
5. Soit $Y_0 = (x_0; y_0; z_0) \in \mathbb{R}^3$ avec $0 < a(x_0; y_0) < 1$ et $z_0 > 0$.
   a). Montrer que la solution maximale $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de (E) valant Y_0 en 0 vérifie : pour tout $t \in J$, $0 < a(x(t); y(t)) < 1$ et $z(t) > 0$. Montrer que, pour $t \in J \cap \mathbb{R}^+$, $z(t) \leq z_0$.
   b). En déduire que $b := \sup J = +\infty$.
   c). Vérifier que la limite
   $$\lim_{t \to +\infty} a\big(x(t); y(t)\big)$$
   existe et vaut 0. (Indication : on pourra utiliser l'équation (U).)
   d). En déduire que
   $$\lim_{t \to +\infty} z(t) \;=\; 0\,.$$
   e). Que peut-on en déduire sur l'ensemble positivement limite $L^+(Y_0)$ de Y_0 ? Justifier la réponse.

Exercice 3. : (17 pts.)
Soit $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire correspondant. On considère l'équation différentielle (E), d'inconnue $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), donnée par

$$\forall t \in I\,, \quad X'(t) \;=\; r(t) \cdot \|X(t)\|^2 \cdot X(t)\,.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir plus loin), il existe, pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^d$, une unique solution maximale $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de (E) valant Y_0 en 0, où J est un voisinage ouvert de 0. On note $b = \sup J$.

1. Montrer que l'équation (E) satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.
2. Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit $V \in \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe une fonction continue $a : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall t \in J\,, \quad \langle V\,, Y(t)\rangle \;=\; \langle V\,, Y_0\rangle \cdot e^{a(t)}\,. \tag{1}$$
   En déduire qu'il existe une fonction continue $g : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $t \in J$, $Y(t) = g(t) Y_0$.
3. On suppose r bornée. Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^d$. Montrer que, si Y est bornée sur $[0; b[$ alors $b = +\infty$.

4. On suppose r bornée et strictement positive. Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction strictement croissante définie par

$$f(t) \ = \ 2 \cdot \int_0^t r(s)\, ds \, .$$

Sa limite en $+\infty$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On la note L_0.

a). Montrer que la fonction $J \ni t \mapsto \|Y(t)\|$ ne s'annule pas, est strictement croissante et que

$$\forall t \in J \, , \quad \frac{1}{\|Y(t)\|^2} \ = \ \frac{1}{\|Y_0\|^2} \ - \ f(t) \, . \tag{2}$$

(Indication : on pourra dériver la fonction $J \ni t \mapsto \|Y(t)\|^2$.)

b). On suppose que $L_0 < \|Y_0\|^{-2}$. Montrer que la fonction Y est bornée sur $[0; b[$. En déduire que $b = +\infty$ et que la

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t)$$

existe dans $\mathbb{R}^d$. On exprimera cette dernière en fonction de Y_0 et L_0.

c). On suppose que $L_0 > \|Y_0\|^{-2}$. Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in]0; +\infty[$ tel que $f(t_0) = \|Y_0\|^{-2}$. En déduire que $b = t_0$. (Indication : on pourra considérer séparément les cas $b > t_0$ et $b < t_0$.) Montrer que

$$\lim_{t \to b} \|Y(t)\| \ = \ +\infty \, .$$

d). On suppose que $L_0 = \|Y_0\|^{-2}$. Montrer que $b = +\infty$. (Indication : on pourra raisonner par l'absurde.) En déduire que

$$\lim_{t \to b} \|Y(t)\| \ = \ \lim_{t \to +\infty} \|Y(t)\| \ = \ +\infty \, .$$

5. Les résultats précédents sont-ils encore valables si l'on suppose que la fonction r est seulement continue sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

Exercice 1 : 3 pts.

1. 0,5 pt.
2. 2,5 pts : 1,5 pour les trois vecteurs propres ; 1 pour la base.

Exercice 2 : 14 pts.

1. 0,75 pt (0,5 pour la régularité des projections).
2. 0,5 pt.
3. 0,5 pt.
4. 1,25 pts (0,5 pour C.L. ; 0,5 pour l'unicité ; 0,25 pour la sol. constante).
5. a). 3,5 pts : 2,5 pts pour a ; 1 pt pour z.
   b). 2 pts : 0,5 pour C.L. ; 0,5 pour Y bornée ; 1 pour le théorème des bouts.
   c). 2 pts : 0,5 pour l'existence ; 0,5 pour l'encadrement ; 1 pour le pt d'équilibre.
   d). 0,5 pt.
   e). 3 pts : 1 pt pour la réponse ; 2 pts pour la justification.

Exercice 3 : 17 pts.

1. 1,5 pts (0,5 pour la régularité des projections, 0,5 pour C.L.).
2. 1,5 pts : 0,25 pour la régularité, 0,5 pour (1), 0,75 pt pour g.
3. 2 pts : 0,5 pour C.L. ; 0,5 pour la bornitude ; 1 pour le théorème des bouts.
4. a). 3 pts : 1 pour la non-annulation ; 0,75 pour la stricte croissance ; 1,25 pts pour (2).
   b). 2 pts : 0,5 pour Y bornée ; 0,5 pour b ; 0,5 pour la limite de la norme ; 0,5 pour la limite demandée.
   c). 2,5 pts : 1 pour t_0 ; 0,25 pour le cas $b > t_0$; 0,75 pour le cas $b < t_0$, 0,5 pour la limite.
   d). 1,5 pts : 1 pt pour le calcul de b ; 0,5 pour la limite.
5. 3 pts : 1 pour la réponse ; 2 pour la justification.