Université de Cergy-Pontoise.

M1, Contrôle continu de systèmes dynamiques, 6 décembre 2019 (1h 10 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Question de cours (3 pts) :

Soit $(F; \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et V un ouvert non vide de F. Soit $g : V \longrightarrow F$ une application localement lipschitzienne c'est-à-dire telle que, pour tout $x_0 \in V$, il existe un voisinage V_0 de x_0 (dans V) et $k_0 \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall (x;y) \in V_0^2 \, , \, \big\|g(x) \, - \, g(y)\big\| \; \leq \; k_0 \cdot \|x \, - \, y\| \, .$$

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que la fonction $f : I \times V \longrightarrow F$ donnée par $f(t;x) = r(t)g(x)$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

On rappelle que la seconde propriété correspond à la validité de la proposition suivante : pour tout $(t_0; x_0) \in I \times V$, il existe un voisinage W_0 de $(t_0; x_0)$ (dans $I \times V$) et $k_0 \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall (t;x) \in W_0 \, , \, \forall (t;y) \in W_0 \, , \, \big\|f(t;x) \, - \, f(t;y)\big\| \; \leq \; k \cdot \|x \, - \, y\| \, .$$

Exercice 1. : (5 pts). On se place dans le cadre de la **question de cours**. Soit $(F; \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et V un ouvert non vide de F. Soit $g : V \longrightarrow F$ une application localement lipschitzienne. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. D'après la **question de cours**, on sait que la fonction $f : I \times V \longrightarrow F$ donnée par $f(t;x) = r(t)g(x)$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
Soit (A) (resp. (E)) l'équation différentielle d'inconnue $y : J \longrightarrow F$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ (resp. un sous-intervalle de I), donnée par, pour tout $t \in J$, $y'(t) = g(y(t))$ (resp. $y'(t) = f(t; y(t)) = r(t)g(y(t))$).
Soit $a \in I$ et $R : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$R(t) \; = \; \int_a^t r(s) \, ds \, .$$

Comme R est C^1 de dérivée strictement positive, elle est continue et strictement croissante donc bijective de I sur $R(I)$. De plus, sa bijection réciproque $R^{\langle -1 \rangle} : R(I) \longrightarrow I$ est C^1.

1. Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $x_0 \in F$ et $x : J \longrightarrow F$ la solution maximale de (A) valant x_0 en 0. Construire à l'aide de x une solution h_x de (E) valant x_0 en a.
2. Soit $\tilde{J}$ un sous-intervalle ouvert de I contenant a, $z_0 \in F$ et $z : \tilde{J} \longrightarrow F$ la solution maximale de (E) valant z_0 en a. Construire à l'aide de x une solution $\tilde{h}_z$ de (A) valant z_0 en 0.
3. Montrer qu'il existe une bijection h de l'ensemble des solutions maximales de (A) avec temps initial 0 sur l'ensemble des solutions maximales de (E) avec temps initial a.
4. Que peut-on dire des trajectoires de (A) et de celles de (E) ?

Exercice 2. : (5 pts). Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note par $\|\cdot\|$ et par $\langle\cdot;\cdot\rangle$ la norme et le produit scalaire usuels de $\mathbb{R}^d$, respectivement. On considère l'équation différentielle autonome (E) d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ et un voisinage de 0, équation donnée par $y' = (1 + \|y\|^2)^{-1}y$.

1. Montrer que (E) satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation (E) sont globales.
3. Montrer que le point d'équilibre 0 de l'équation (E) n'est pas positivement stable.

Exercice 3. : (9 pts). Soit $F = \mathrm{L}^2([0;1];\mathbb{C};dx)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications mesurables de $[0;1]$ dans $\mathbb{C}$, de module au carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. On munit cet espace du produit scalaire

$$\langle f\,, g\rangle \;=\; \int_{[0;1]} \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx$$

et on note par $\|\cdot\|$ la norme associée. Muni de cette norme, F est un espace vectoriel normé complet (un espace de Hilbert). On note par $\|\cdot\|_0$ la norme d'opérateur sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues sur F.
Pour $f \in \mathrm{L}^\infty([0;1];\mathbb{C};dx)$, une fonction essentiellement bornée de $[0;1]$ dans $\mathbb{C}$, on pose

$$\|f\|_\infty \;=\; \min\big\{M \in \mathbb{R}; \{x \in [0;1];\ |f(x)| > M\} \text{ est de mesure nulle}\big\}$$

et on considère l'application linéaire $M_f : F \longrightarrow F$ définie par $M_f(g) = fg$.

1. Soit $f \in \mathrm{L}^\infty([0;1];\mathbb{C};dx)$. Montrer que M_f est linéaire continue sur F et vérifier que sa norme $\|M_f\|_0$ vaut $\|f\|_\infty$.
2. Soit $f \in \mathrm{L}^\infty([0;1];\mathbb{C};dx)$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f_t := \exp(tf) \in \mathrm{L}^\infty([0;1];\mathbb{C};dx)$ et que $\exp(tM_f) = M_{f_t}$.
3. Dans toute la suite, on considère la fonction bornée $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(x) = -x$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $g \in F \setminus \{0\}$ tels que $M_f(g) = \lambda g$. Vérifier que $\lambda \in \mathbb{R}^{*-}$.

4. Montrer que la proposition suivante

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \exp(tM_f) \right\|_0 \ = \ 0$$

est fausse.

5. Soit $g \in F$. Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \exp(tM_f) g \right\| \ = \ 0 \, .$$

6. La fonction 0 de F est-elle positivement attractif pour le flot engrendré par M_f ?

7. La fonction 0 de F est-elle positivement exponentiellement attractif pour le flot engrendré par M_f ?

Fin de l'épreuve.

Université de Cergy-Pontoise, Calcul intégral, M1, Systèmes dynamiques.
Barême du contrôle continu du 6 décembre 2019.

Questions de cours : 1,5 pour la continuité, 1,5 pour la locale lipschitziannité.

Exercice 1 : (5 pts).

1. 1 pt.
2. 1,5 pts.
3. 1,5 pts.
4. 1 pt.

Exercice 2 : (5 pts).

1. 1,5 pts.
2. 1,5 pts.
3. 2 pts.

Exercice 3 : (9 pts).

1. 1 pt (0,5 + 0,5).
2. 1,5 pts (0,5 + 1).
3. 1,5 pts (0,5 pour $\lambda \leq 0$ et 1 pour $\lambda \neq 0$).
4. 1 pt.
5. 1 pt.
6. 1,5 pts (0,5 pour la bonne réponse, 0,5 pour stable, 0,5 pour attractif).
7. 1,5 pts (0,5 pour la bonne réponse, 1 pour la preuve).

Exercice 4. : (5 pts). Soit (L) l'équation différentielle d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $Y' = AY$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A a trois valeurs propres distinctes.
2. Montrer que 0 n'est pas positivement stable pour le flot engendré par A.
3. Donner un sous-espace E de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 qui est positivement stable par le flot de A (i.e. pour tout $t \geq 0$, $\exp(tA)(E) \subset E$) et tel que 0 soit positivement exponentiellement attractif pour la restriction de ce flot à E.