Université de Cergy-Pontoise.

M1, Examen de systèmes dynamiques, 18 décembre 2019 (3h).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

À l'exception d'une feuille A4 manuscrite et nominative, les documents sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice ou un problème, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées.

L'épreuve comporte une question de cours, deux exercices et un problème, le tout déployé sur quatre pages.

Note sur 20 obtenue en divisant par 3 le nombre de points. Le barème de points sur 90 est indicatif.

Début de l'épreuve.

Question de cours : (5 pts).
Soit $(F; \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathbb{R} \times F \longrightarrow F$ une application de classe C^1. Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $y : I \longrightarrow F$ (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$) donnée par

$$\forall t \in I\ , \quad y'(t) \ = \ f\big(t; y(t)\big)\ .$$

Montrer que l'équation (E) satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 1. : (10 pts).
On note par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont la base canonique est formée des matrices suivantes :

$$E_{11} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad E_{12} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad E_{21} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad E_{22} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note par N^T sa transposée. On rappelle que la trace Tr est l'application linéaire qui à une matrice

$$N \ = \ \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le réel $n_{11} + n_{22}$.
On considère l'équation différentielle (F) d'inconnue $M : I \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$) donnée par $M' = -(\mathrm{Tr}(A^T \cdot M))A$, où

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

TOURNEZ SVP.

1. Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (F) sur $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que toutes les solutions maximales sont globales.
2. Déterminer explicitement l'ensemble des points d'équilibre de l'équation (F).
3. Montrer que la fonction nulle est positivement stable pour l'équation (F).
4. La fonction nulle est-elle positivement attractive pour l'équation (F) ?

Exercice 2. : (19 pts).
Pour $c \in \mathbb{C}$, on note par $\overline{c}$ (resp. $\Re c$, resp. $\Im c$) le conjugué (resp. la partie réelle, resp. la partie imaginaire) de c. On identifie $\mathbb{R}$ à la partie $\{x + 0i; x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$.
On considère l'équation différentielle (C), donnée par $y' = v(y)$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{C}$ (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$), associée au champ de vecteurs $v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 qui, à $z \in \mathbb{C}$, associe $v(z) = (z - \overline{z})z$.

1. Montrer que la fonction "module" $|\cdot|$ est une intégrale première du champ v.
2. Montrer que le champ v est complet.
3. Vérifier que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points d'équilibre de v.
4. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la partie imaginaire $\Im z_0$ de z_0 est non nulle. Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la solution maximale de (C) valant z_0 à $t = 0$.
   a). Montrer que la fonction $\Im\gamma$ a partout le même signe strict que $\Im z_0$, c'est-à-dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\Im\gamma)(t) \cdot (\Im z_0) > 0$.
   b). Montrer que la fonction $\Re\gamma$ est strictement décroissante.
   c). En déduire que la trajectoire $\mathcal{C}(z_0)$ de z_0 est égale à l'ensemble
$$\mathcal{L}(z_0) \;=\; \big\{z \in \mathbb{C}; (\Im z) \cdot (\Im z_0) > 0\big\} \cap \big\{z \in \mathbb{C}; |z| = |z_0|\big\}\,.$$
5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Est-il positivement stable pour v ? Si oui, est-il attractif ? Justifier toute réponse.

TOURNEZ SVP.

Problème.

(56 pts).

L'objet de ce problème est d'étudier l'équation différentielle non-linéaire (H) d'inconnue $\tilde{Y} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par, pour $t \in I$, avec $\tilde{Y}(t) = (\tilde{x}(t); \tilde{y}(t))$,

$$\tilde{x}'(t) \;=\; \tilde{y}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{y}'(t) \;=\; -\tilde{x}(t) \,+\, \big(1 \,-\, \tilde{x}(t)^2 \,-\, \tilde{y}(t)^2\big) \cdot \tilde{y}(t)\,. \tag{1}$$

Le problème se décompose en deux parties. La première est consacrée à l'étude d'une équation différentielle auxiliaire. La deuxième partie se concentre sur l'équation autonome (H) donnée par (1).

Partie I.

(27 pts).

Dans cette partie, on étudie l'équation différentielle non-linéaire (P) d'inconnue $\tilde{R} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par, pour $t \in I$, avec $\tilde{R}(t) = (\tilde{r}(t); \tilde{\theta}(t))$,

$$\tilde{r}'(t) \;=\; \tilde{r}(t) \cdot \big(1 \,-\, \tilde{r}(t)^2\big) \cdot \sin^2\!\big(\tilde{\theta}(t)\big)\,, \tag{2}$$

$$\tilde{\theta}'(t) \;=\; -1 \,+\, \big(1 \,-\, \tilde{r}(t)^2\big) \cdot \cos\!\big(\tilde{\theta}(t)\big) \cdot \sin\!\big(\tilde{\theta}(t)\big)\,. \tag{3}$$

1. Montrer que l'équation (P) satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les solutions maximales $R = (r; \theta) : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de l'équation (P) telles que la première composante r est constante.

3. Dans toute la suite de cette partie I, on considère une solution maximale $R = (r; \theta) : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de l'équation (P) valant $(r_0; \theta_0)$ à $t = 0$, où $r_0 \in]0; 1[$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $t \in J$, $0 < r(t) < 1$. Vérifier que r est strictement croissante et θ est strictement décroissante.

4. En déduire que $J = \mathbb{R}$.

5. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \theta = +\infty$ et que $\lim\limits_{+\infty} \theta = -\infty$.

6. Montrer qu'il existe une constante c_0 telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \sin^2\!\big(\theta(s)\big)\, ds \;=\; \ln\!\big(r\big) \,-\, \frac{1}{2} \cdot \ln\!\big(1 - r(t)^2\big) \,+\, c_0\,. \tag{4}$$

7. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} r = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} r = 0$.

TOURNEZ SVP.

Partie II.

(29 pts).

Dans cette partie, on étudie l'équation différentielle non-linéaire (H) donnée par (1) à l'aide de l'équation différentielle (P) considérée dans la partie I.

1. Montrer que l'équation (H) satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

2. Soit $Y_0 = (x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (x; y) : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (H) valant $(x_0; y_0)$ à $t = 0$. Soit $\lambda : J \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\lambda(t) = 1 - x(t)^2 - y(t)^2$. Montrer que
$$\lambda(t) \;=\; \lambda(0) \cdot \exp\left(-2\int_0^t y(s)^2\, ds\right)\,. \tag{5}$$

3. On considère une solution maximale de (H) qui est périodique, c'est-à-dire une solution $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de l'équation (H) telle qu'il existe $T > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t + T) = Y(t)$. Montrer que Y est soit la fonction nulle soit l'image de Y est incluse dans le cercle unité centré en $(0; 0)$.

4. Dans toute la suite de cette partie II, on considère une solution maximale $Y = (x; y) : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de l'équation H valant $Y_0 = (x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ à $t = 0$, avec $0 < x_0^2 + y_0^2 < 1$ et $x_0 > 0$. Montrer que Y est globale (i.e. $J = \mathbb{R}$).

5. Soit J_1 un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et sur lequel $x > 0$. Soit $r : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $\theta : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par
$$r(t) \;=\; \big(x(t)^2 \,+\, y(t)^2\big)^{1/2} \quad \text{et} \quad \theta(t) \;=\; \mathrm{Arctan}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)\,.$$
Sur J_1, on a bien sûr $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Montrer que $(r; \theta)$ est une solution sur J_1 de l'équation (P) donnée par (2) et (3) dans la partie I.

6. Montrer que les fonctions r et θ se prolongent à $\mathbb{R}$ tout entier de sorte que, sur $\mathbb{R}$, $(r; \theta)$ soit encore une solution de (P), et qu'on ait toujours $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

7. Déterminer $L^-(Y_0)$.

8. Déterminer $L^+(Y_0)$.

Fin de l'épreuve.

Barème : Total : 90 pts.

Question de cours (5 pts) :
1 pt pour la continuité, 4 points pour la locale lipschitziannité.

Exercice 1 (10 pts) :

1. 1,5 pts pour C.L., 1,5 pts pour globalité.
2. 2 pts.
3. 2 pts.
4. 1 pt pour la bonne réponse, 2 pts pour la non-attraction.

Exercice 2 (19 pts) :

1. 1 pt.
2. 2 pts.
3. 1 pt.
4. 9 pts. a) : 3 pts ; b) : 1 pt ; c) : 5 pts (1 pt pour $\mathcal{C}(z_0) \subset \mathcal{L}(z_0)$, 2 pts pour $\Re\gamma(\mathbb{R}) =]-|z_0|;|z_0|[$, 2 points pour $\mathcal{L}(z_0) \subset \mathcal{C}(z_0)$).
5. 6 pts (1 pt pour réponse, 2 pts pour justification, 1 pt pour réponse, 2 pts pour justification).

Problème : 56 pts.
Partie I : 27 pts.

1. 3 pts.
2. 5 pts : 1 pt pour le cas où $\sin(\theta)$ s'annule; 2 pts pour le cas $r = 0$; 2 pts pour le cas $r = \pm 1$.
3. 7 pts : 2 pts pour $0 < r(t)$; 2 pts pour $r(t) < 1$; 2 pts pour r strictement croissante; 1 pt pour θ strictement décroissante.
4. 3 pts : 1 pt pour la bornitude, 2 pts pour le théorème de bouts.
5. 1 pt.
6. 3 pts.
7. 5 pts : 1 pt pour relier (4) à une primitive de $\sin^2$; 2 pts pour $+\infty$; 2 pts pour $-\infty$.

Partie II : 29 pts.

1. 2 pts.
2. 2 pts.
3. 3 pts: 1,5 pts pour 0; 1,5 pts pour le cercle.
4. 6 pts. 2 pts pour $0 < x^2 + y^2$; 2 pts pour $x^2 + y^2 < 1$; 2 pts pour le théorème des bouts.
5. 3 pts : 1 pt pour la régularité, 2 pts pour solution.
6. 5 pts : 2 pts pour prolonger $(r; \theta)$ en solution globale de (P); 2 pts pour $(r\cos\theta; r\sin\theta)$ solution globale de (H); 1 pt pour la globalité du passage en polaire.
7. 2 pts : 1 pt pour la limite en $-\infty$; 1 pt pour le résultat du cours.
8. 6 pts. 1 pt pour le résultat, 2 pts pour $L^+(Y_0) \subset \mathbb{S}^1$; 3 pts pour $\mathbb{S}^1 \subset L^+(Y_0)$.