Université de Cergy-Pontoise.

M1, Examen 2 de systèmes dynamiques, 25 juin 2020 (1h 15 min.).

Les documents sont autorisés. La copie doit être nominative, manuscripte, numérisée et envoyée avant l'échéance.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice ou un problème, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées.

L'épreuve comporte deux exercices déployés sur deux pages.
Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (6 pts).
Soit (F_1) l'équation différentielle, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), donnée par

$$\forall t \in I\ , \quad y'(t) \ = \ \frac{t}{(y(t)^2+1)^3}\ .$$

Soit (F_2) l'équation différentielle, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), donnée par

$$\forall t \in I\ , \quad y'(t) \ = \ \frac{y_1(t)y_2(t)}{1+\|y(t)\|^2}\ ,$$

où, pour $t \in I$, $(y_1(t); y_2(t))$ sont les coordonnées du vecteur $y(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à ces deux équations et que leurs solutions maximales sont toutes globales.

Exercice 2. : (16 pts.)
Soit $r \in \mathbb{R}^+$. On considère l'équation différentielle (E_r), d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), donnée par

$$\forall t \in I\ , \quad y'(t) \ = \ \cos^2\big(y(t)\big) \ + \ r \cdot \sin^2\big(y(t)\big)\ .$$

TOURNEZ, SVP.

1. Montrer que l'équation (E_r) satisfait les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les solutions maximales de (E_r) sont globales.
3. Vérifier que toute solution de (E_r) est croissante.
4. On suppose $r > 0$. On considère une solution maximale $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de (E_r).
   a). Montrer que α est une fonction strictement croissante.
   b). Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \alpha = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \alpha = +\infty$.
   c). En déduire que α est bijective.
   d). Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit t_n l'unique réel t tel que $\alpha(t) = (\pi/2) + n\pi$. Montrer que, sur $]t_n; t_{n+1}[$, la fonction $\tan \alpha$, la composée de tangente avec α, est bien définie et satisfait une équation différentielle que l'on explicitera.
   e). Déterminer explicitement α sur $]t_n; t_{n+1}[$ en fonction de t_n.
5. On suppose $r = 0$.
   a). Trouver tous les réels α_0 pour lesquels la solution maximale α de (E_0), valant α_0 à $t = 0$, est une fonction constante.
   b). Soit $k_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_0 \in]-(\pi/2) + k_0\pi; (\pi/2) + k_0\pi[$ et α la solution maximale de (E_0), valant α_0 à $t = 0$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad -\frac{\pi}{2} + k_0\pi \;<\; \alpha(t) \;<\; \frac{\pi}{2} + k_0\pi\,.$$

   c). Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \alpha = -(\pi/2) + k_0\pi$ et $\lim\limits_{+\infty} \alpha = (\pi/2) + k_0\pi$.
   d). Montrer que la fonction $\tan \alpha$, la composée de tangente avec α, est bien définie sur $\mathbb{R}$ et satisfait une équation différentielle que l'on explicitera.
   e). Déterminer explicitement α.

Fin de l'épreuve.