

# Théorie du commutateur de Mourre. Application au problème à $N$ corps.

Thierry Jecko  
IRMAR, Université de Rennes 1,  
Campus Beaulieu,  
F-35042 Rennes Cédex, France  
jecko@univ-rennes1.fr  
[http ://perso.univ-rennes1.fr/thierry.jecko](http://perso.univ-rennes1.fr/thierry.jecko)

23-11-2004

## Résumé

Dans ce cours, on présentera la théorie (originale) du commutateur de Mourre ainsi que le traitement moderne du problème à  $N$  corps (quantique surtout). En particulier, on abordera les conséquences de la théorie de Mourre sur ce problème à  $N$  corps.

**Mots clé :** Opérateur conjugué, estimation de Mourre, principe d'absorption limite, valeurs au bord de la résolvante, absence de spectre singulier continu, théorie de la diffusion (collisions), estimations de propagation, complétude asymptotique, problème à  $N$  corps (formulation géométrique), théorème HVZ, champ de vecteur de Graf.

## 1 Introduction.

Au début des années 1980, Éric Mourre (du Centre de Physique Théorique de Marseille Luminy) introduisit ce qu'on appela plus tard la théorie du commutateur de Mourre. Elle constitua un pas décisif vers la preuve de la complétude asymptotique de la théorie de la diffusion (collisions) pour les systèmes quantiques à  $N$  corps ( $N \geq 3$ ). Même sous sa forme originale, cette théorie est encore utilisée aujourd'hui. Sa puissance a été rapidement reconnue et des généralisations sont apparues dans les années 1990. Actuellement, on procède encore à des aménagements surtout pour l'appliquer à la théorie quantique des champs.

Le problème à  $N$ -corps (classique ou quantique), avec  $N \geq 3$ , présente des difficultés spécifiques, c'est-à-dire que l'on ne voit pas dans les systèmes à deux corps. Le résultat

de complétude asymptotique précédent permet de mieux comprendre ces difficultés. De plus, un des objectifs de la théorie des champs, actuellement en grand développement au sein de la physique mathématique, est de comprendre l'interaction entre la lumière et une molécule, qui est un exemple de système à  $N$  corps. Ainsi, ces particularités sont toujours d'actualité.

Il m'a donc semblé utile de présenter, de manière détaillée, dans un cours de Master 2 (DEA) de niveau 2, la théorie de Mourre d'une part et le traitement moderne du problème à  $N$  corps, d'autre part. Ces deux parties seront largement indépendantes même si l'on verra des conséquences de la première sur la seconde.

Les objectifs principaux de ce cours seront les suivants.

1. pour la théorie de Mourre :
  - présenter les résultats et des conséquences immédiates,
  - donner une idée assez précise de la preuve des résultats,
  - fournir des exemples d'applications de la théorie,
  - décrire les extensions apportées à la théorie,
2. et pour le problème à  $N$  corps :
  - présenter en détail la formulation géométrique du problème à  $N$  corps,
  - donner des résultats, en particulier l'estimation de Mourre et la complétude asymptotique dans le cas à courte portée.

Pour ce cours, on s'appuie sur la bibliographie suivante. Pour les objets de base, on puise dans la bible [RS1, RS2, RS3, RS4]. On peut aussi consulter [K]. Pour la théorie de Mourre, on utilise principalement l'article original de Mourre [Mo] ainsi que [JMP]. On utilisera aussi le livre [ABG]. En ce qui concerne le problème à  $N$  corps, on suit l'excellent livre [DG].

## 2 Théorie du commutateur de Mourre.

Après avoir fait quelques rappels sur les objets de base, on présentera les résultats de la théorie de Mourre. On verra ensuite des conséquences immédiates surtout en théorie de la diffusion (collisions). Un paragraphe sera consacré à une présentation rapide de diverses applications connues de la théorie. La stratégie générale sera ensuite exposée suivie de différentes extensions de la théorie. On verra sur un exemple comment on s'y prend pour appliquer la théorie et par la même des difficultés pour l'appliquer. Enfin, on terminera par une présentation détaillée (et presque complète) de la preuve des résultats.

### 2.1 Préliminaires.

Dans ce paragraphe, on donne quelques propriétés de base des opérateurs auto-ajoints dans un espace de Hilbert. On introduit ici la plupart des notations de cette partie. On renvoie à [K, RS1, RS2] pour plus de détails.

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert complexe. On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire, pris linéaire

à droite. Soit  $\|\cdot\|$  la norme associée. On note par  $I$  l'application identité sur  $\mathcal{H}$ . On notera par  $\mathcal{B}(H)$  l'espace de Banach des opérateurs continus sur  $\mathcal{H}$  et par  $\|\cdot\|$  (encore!) sa norme. On rappelle que les opérateurs compacts sur  $\mathcal{H}$  forment un idéal bilatère de  $\mathcal{B}(H)$ . Un opérateur  $B \in \mathcal{B}(H)$  est dit positif si, pour tout  $\phi \in H$ ,  $\langle \phi, B\phi \rangle \geq 0$ . L'espace  $H$  étant complexe, un tel opérateur est auto-adjoint.

Une application linéaire  $H$  d'une partie  $\mathcal{D}(H)$ , dense dans  $\mathcal{H}$ , à valeurs dans  $\mathcal{H}$  est appelée opérateur (non borné) dans  $\mathcal{H}$  de domaine  $\mathcal{D}(H)$ . Pour un tel opérateur, on peut munir  $\mathcal{D}(H)$  de la norme du graphe donnée par  $\|\phi\|_H := \|\phi\| + \|H\phi\|$ , pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(H)$ . Si  $(\mathcal{D}(H), \|\cdot\|_H)$  est fermé, on dit que  $H$  est fermé. Dans ce cas, il est linéaire continu de  $(\mathcal{D}(H), \|\cdot\|_H)$  dans  $(H, \|\cdot\|)$  (par le théorème du graphe fermé). Toute partie  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(H)$  telle que  $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_H)$  est dense dans  $(\mathcal{D}(H), \|\cdot\|_H)$ , est un coeur pour  $H$ .

On dit que  $H$  est fermable s'il admet une extension fermée, c'est-à-dire s'il existe un opérateur fermé  $E$  tel que  $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(E)$  et la restriction  $E|_{\mathcal{D}(H)}$  de  $E$  à  $\mathcal{D}(H)$  coïncide avec  $H$ . Dans ce cas, la plus petite extension est appelée la fermeture de  $H$ .

On définit  $H^*$ , l'adjoint d'un opérateur  $H$ , de la façon suivante. Soit

$$\mathcal{D}(H^*) := \left\{ \phi \in \mathcal{H}; \exists \tau \in \mathcal{H}; \forall \psi \in \mathcal{D}(H), \langle \phi, H\psi \rangle = \langle \tau, \psi \rangle \right\}.$$

Comme  $\mathcal{D}(H)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , le  $\tau$  en question est unique et on peut poser, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(H^*)$ ,  $H^*\phi = \tau$ . Lorsque  $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H^*)$  et  $H^*|_{\mathcal{D}(H)} = H$ , on dit que  $H$  est symétrique. Dans ce cas,  $H$  est fermable et on peut écrire, pour tout  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(H)$ ,  $\langle \phi, H\psi \rangle = \langle H\phi, \psi \rangle$ . Si, de plus, on a  $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H^*)$ ,  $H$  est fermé et on dit qu'il est auto-adjoint.

Pour un opérateur  $H$ , on définit son spectre, noté  $\sigma(H)$ , de la manière suivante. On dit que  $z \in \mathbb{C}$  n'appartient pas au spectre de  $H$  si l'opérateur  $zI - H$ , de  $\mathcal{D}(H)$  dans  $\mathcal{H}$ , admet un inverse continu. Pour un tel  $z$ , l'opérateur  $(zI - H)^{-1}$  est en fait continu de  $\mathcal{H}$  dans  $(\mathcal{D}(H), \|\cdot\|_H)$ .  $\sigma(H)$  est un fermé de  $\mathbb{C}$ . Si  $zI - H$  n'est pas injectif,  $z \in \sigma(H)$  et on dit que  $z$  est une valeur propre. L'ensemble des valeurs propres est noté  $\sigma_{\text{vp}}(H)$ . L'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie est appelé spectre discret et noté  $\sigma_{\text{disc}}(H)$ . Le spectre essentiel est défini par  $\sigma_{\text{ess}}(H) := \sigma(H) \setminus \sigma_{\text{disc}}(H)$ .

Prenons  $H$  fermé. Si  $zI - H$  est injectif et surjectif,  $z \notin \sigma(H)$  par le théorème de l'application ouverte. Lorsque  $z \in \sigma(H)$  et  $zI - H$  est injectif, l'image de  $zI - H$  peut être dense dans  $\mathcal{H}$  (mais  $\neq \mathcal{H}$ ) ou bien d'orthogonal non nul. Ce dernier cas ne se produit pas si  $H$  est auto-adjoint. Lorsque  $H$  est auto-adjoint ou même symétrique,  $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$ . Lorsque  $H$  est borné,  $\sigma(H)$  est compact.

On suppose désormais que  $H$  est un opérateur (non borné) auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$ . On rappelle que l'on dispose d'un calcul fonctionnel pour un tel opérateur. Précisément, pour toute fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  borélienne bornée, on peut définir  $g(H) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . L'application  $g \mapsto g(H)$  jouit des propriétés agréables suivantes :

1. C'est un morphisme de  $*$ -algèbres : c'est linéaire et pour tout  $f, g$ ,  $\bar{g}(H) = g(H)^*$  et  $(fg)(H) = f(H)g(H) = g(H)f(H)$ .
2. Si  $g$  est positive, l'opérateur  $g(H)$  est positif.
3. Pour tout  $g$ ,  $\|g(H)\| \leq \sup_{t \in \sigma(H)} |g(t)|$ . En particulier, si  $g$  est nulle sur  $\sigma(H)$  alors  $g(H)$  est l'opérateur nul.

4. Si  $g_n \rightarrow g$  ponctuellement et  $(\sup_{t \in \sigma(H)} |g_n(t)|)_n$  est bornée, alors, pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,  $g_n(H)\phi \rightarrow g(H)\phi$ .

Pour tout borélien  $b$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{1}_b$  désigne la fonction caractéristique de  $b$ . D'après la propriété 1 ci-dessus,  $\mathbf{1}_b(H)$  est une projection orthogonale que l'on note  $P_H(b)$ . Ces projections sont appelées projections spectrales de  $H$ . Pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ , l'application qui, à tout borélien  $b$  de  $\mathbb{R}$ , associe  $\langle \phi, P_H(b)\phi \rangle$  est une mesure de Borel  $\mu_\phi$  positive. On peut l'écrire, d'après le théorème de Radon-Nikodym, comme somme d'une mesure purement ponctuelle, d'une mesure absolument continue et d'une mesure singulière continue (par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ ). Pour  $\star = pp, sc, ac$  et  $\star\star =$  purement ponctuelle, singulière continue, absolument continue respectivement, on pose  $\mathcal{H}_\star := \{\phi \in \mathcal{H}; \mu_\phi \text{ est } \star\star\}$ . On a alors une décomposition en somme directe orthogonale  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{ac}$ . On pose  $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{ac}$ . On les appelle respectivement sous-espace purement ponctuel, singulier continu, absolument continu et continu de  $H$ . Pour  $\star = pp, sc, ac, c$ , on note par  $\mathbf{1}^\star(H)$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{H}_\star$  et, pour tout borélien  $b$  de  $\mathbb{R}$ , on pose  $\mathbf{1}_b^\star(H) = \mathbf{1}_b(H)\mathbf{1}^\star(H) = \mathbf{1}^\star(H)\mathbf{1}_b(H)$ . Ces sous-espaces sont stables par  $H$  au sens suivant :  $H(\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{H}_\star) \subset \mathcal{H}_\star$ . On note par  $H|_{\mathcal{H}_\star}$  la restriction de  $H$  à  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{H}_\star$ . On pose  $\sigma_\star(H) := \sigma(H|_{\mathcal{H}_\star})$ . On les appelle respectivement spectre purement ponctuel, singulier continu, absolument continu et continu de  $H$ . On les note respectivement  $\sigma_{pp}(H)$ ,  $\sigma_{sc}(H)$ ,  $\sigma_{ac}(H)$  et  $\sigma_{cont}(H)$ . On a  $\sigma_{cont}(H) := \sigma_{sc}(H) \cup \sigma_{ac}(H)$  et  $\sigma_{pp}(H) = \overline{\sigma_{vp}(H)}$ . À cause de la décomposition en somme directe précédente, on a  $\sigma(H) = \sigma_{pp}(H) \cup \sigma_{sc}(H) \cup \sigma_{ac}(H)$  mais les parties ne sont pas forcément deux à deux disjointes.

On peut caractériser des parties du spectre en terme de projections spectrales. Tout d'abord,  $\lambda \in \sigma(H)$  si et seulement si, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $P_H([\lambda - \epsilon; \lambda + \epsilon]) \neq 0$ . Ensuite,  $\lambda \in \sigma_{ess}(H)$  si et seulement si, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $P_H([\lambda - \epsilon; \lambda + \epsilon])$  est de rang infini. Bien sûr,  $\lambda \in \sigma_{disc}(H)$  si et seulement si, il existe  $\epsilon > 0$ , tel que  $P_H([\lambda - \epsilon; \lambda + \epsilon])$  soit de rang fini (non nul). Enfin,  $\lambda \in \sigma_{cont}(H)$  si et seulement si  $w - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P_H([\lambda - \epsilon; \lambda + \epsilon]) = 0$ . Cette dernière propriété faisant intervenir une limite faible, signifie par définition que, pour tous  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \phi, P_H([\lambda - \epsilon; \lambda + \epsilon])\psi \rangle = 0$ .

À partir d'un opérateur  $H$ , on peut construire la forme sesquilinéaire  $\mathcal{D}(H) \ni \phi, \psi \mapsto \langle \phi, H\psi \rangle$ . Il existe une réciproque dont on aura besoin. Soit  $q : \mathcal{Q}(q)^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une forme sesquilinéaire telle que  $\mathcal{Q}(q)$ , son domaine de forme, soit dense dans  $\mathcal{H}$ . On dit qu'elle est symétrique si, pour  $\phi, \psi \in \mathcal{Q}(q)$ ,  $\overline{q(\psi, \phi)} = q(\phi, \psi)$ , qu'elle est bornée inférieurement s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $\phi \in \mathcal{Q}(q)$ ,  $q(\phi, \phi) \geq -M\|\phi\|^2$ . Dans ce dernier cas, elle est symétrique et si l'on peut choisir  $M = 0$ , elle est dite positive. On dit qu'une forme  $q$ , bornée inférieurement (par  $-M$ ), est fermée si  $\mathcal{Q}(q)$  est fermé pour la norme

$$\|\phi\|_q := \left( q(\phi, \phi) + (M + 1)\|\phi\|^2 \right)^{1/2}.$$

Une forme bornée inférieurement est dite fermable si elle admet une extension fermée. Dans ce cas, la plus petite extension est appelée la fermeture de la forme.

Il se trouve qu'une forme bornée inférieurement et fermée  $q$  est la forme quadratique d'un unique opérateur auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$ . Cela signifie qu'il existe une partie  $\mathcal{D}(H)$  de  $\mathcal{H}$ , dense dans  $\mathcal{Q}(q)$  pour la norme  $\|\cdot\|_q$ , et un opérateur  $H$ , auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$ , de domaine  $\mathcal{D}(H)$ , tel que, pour tout  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(H)$ ,  $q(\phi, \psi) = \langle \phi, H\psi \rangle$ , et qu'il y en a qu'un qui vérifie ces propriétés.

Pour finir, on énonce des propriétés importantes provenant du théorème de Stone. On note par  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  le sous-groupe de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  composé des opérateurs unitaires sur  $\mathcal{H}$ . L'opérateur auto-adjoint  $H$  définit, via le calcul fonctionnel précédent, un opérateur unitaire  $\exp(itH)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$  vérifiant les deux propriétés suivantes.

- $\{\exp(itH), t \in \mathbb{R}\}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ . Il est fortement continu : pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(itH)\phi \in \mathcal{H}$  est continue.
- Si, pour  $\phi \in \mathcal{H}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} (\exp(itH)\phi - \phi)/t$  existe dans  $\mathcal{H}$  alors  $\phi \in \mathcal{D}(H)$ . Pour  $\phi \in \mathcal{D}(H)$ , cette limite existe et vaut  $iH\phi$ .

Réciproquement, tout sous-groupe de  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ , fortement continu, est donné par  $\exp(itH)$ , pour un certain opérateur auto-adjoint  $H$ .

## 2.2 Résultat de la théorie de Mourre.

Soit  $H$  et  $A$  deux opérateurs auto-adjoints (non bornés) dans  $\mathcal{H}$  vérifiant, pour un  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les propriétés suivantes.

- (a)  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  est un coeur pour  $H$ .
- (b) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(itA)\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$  et, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(H)$ ,

$$\sup_{|t| \leq 1} \|H \exp(itA) \phi\| < \infty.$$

- (c) La forme  $[H, iA]$ , définie sur  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  par

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A), \quad \langle \phi, [H, iA]\psi \rangle := \langle H\phi, iA\psi \rangle - \langle A\phi, iH\psi \rangle$$

est bornée inférieurement et fermable. De plus, le domaine de  $[H, iA]^0$ , l'opérateur auto-adjoint associé à sa fermeture, contient  $\mathcal{D}(H)$ .

- (d) La forme  $[[H, iA]^0, iA]$ , définie sur  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  peut être vue comme opérateur borné de  $\mathcal{D}(H)$  dans son dual  $\mathcal{D}(H)^*$ .
- (e) Il existe  $\alpha, \delta > 0$ , il existe un opérateur compact  $K$  sur  $\mathcal{H}$  tels que, en notant  $P_H(\lambda, \delta) := P_H([\lambda - \delta; \lambda + \delta])$ , on ait

$$P_H(\lambda, \delta) [H, iA] P_H(\lambda, \delta) \geq \alpha P_H(\lambda, \delta) + P_H(\lambda, \delta) K P_H(\lambda, \delta). \quad (2.1)$$

Rappelons que (a) signifie que  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  est dense dans  $\mathcal{D}(H)$  pour la norme du graphe  $\|\cdot\|_H$ . Dans (c), on utilise le résultat rappelé ci-dessus sur les formes sesquilinéaires semi-bornées et fermées qui donne l'existence de l'opérateur auto-adjoint en question. On peut reformuler (d) en disant qu'il existe  $c > 0$  tel que, pour tous  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ ,

$$\left| \langle \phi, [[H, iA]^0, iA]\psi \rangle \right| \leq c \|\phi\|_H \|\psi\|_H.$$

Il est à noter que, pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,  $P_H(\lambda, \delta)\phi \in \mathcal{D}(H)$ . (2.1) signifie, au sens de l'hypothèse (c), que, pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle P_H(\lambda, \delta)\phi, [H, iA] P_H(\lambda, \delta)\phi \rangle \geq \alpha \|P_H(\lambda, \delta)\phi\|^2 + \langle P_H(\lambda, \delta)\phi, K P_H(\lambda, \delta)\phi \rangle.$$

**Définition 2.1.** *Étant donnés deux opérateurs  $A, H$ , auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on dit que  $A$  est un opérateur conjugué à  $H$  au point  $\lambda$  si les propriétés (a), (b), (c), (d) et (e) sont satisfaites. L'inégalité (2.1) est appelée l'estimation de Mourre au point  $\lambda$ .*

**Théorème 2.2 (Mourre, 1981).** *Soit  $H$  un opérateur auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$  admettant un opérateur conjugué  $A$  au point  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, il existe  $\delta_1 > 0$  tel que :*

1. L'ensemble  $\sigma_{\text{pp}}(H) \cap ]\lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1[$  est fini,
2. pour tout  $[a; b]$  inclu dans  $(\sigma_{\text{cont}}(H) \cap ]\lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1[) \setminus \sigma_{\text{pp}}(H)$ ,

$$\sup_{\substack{\Re z \in [a; b] \\ \Im z \neq 0}} \left\| |A + i|^{-1} (zI - H)^{-1} |A + i|^{-1} \right\| < \infty. \quad (2.2)$$

**Remarque 2.3.** *L'opérateur borné  $|A + i|^{-1}$  est l'opérateur  $f(A)$  donné par le calcul fonctionnel pour la fonction borélienne bornée  $f : t \mapsto |t + i|^{-1}$ . Soit  $g : t \mapsto \langle t \rangle^{-1}$ , avec  $\langle t \rangle := (1 + t^2)^{1/2}$ . Comme  $f/g$  est bornée, on peut remplacer dans (2.2) les poids  $|A + i|^{-1}$  par  $\langle A \rangle^{-1} = g(A)$ .*

*Il existait pour certains opérateurs de Schrödinger une estimation similaire à (2.2) (cf. [RS4]) mais avec une preuve difficilement généralisable. Le résultat de Mourre est un saut qualitatif énorme.*

*En fait, la théorie de Mourre donne aussi (cf. [JMP]) l'existence et la continuité en  $\mu \in [a; b]$  des limites, en norme d'opérateur borné sur  $\mathcal{H}$ ,*

$$\| \cdot \| - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} |A + i|^{-1} \left( (\mu \pm i\epsilon)I - H \right)^{-1} |A + i|^{-1}. \quad (2.3)$$

**Définition 2.4.** *L'estimation (2.2) s'appelle le théorème d'absorption limite pour  $H$  sur l'intervalle  $[a; b]$ . Les opérateurs bornés (2.3) sont les valeurs au bord de la résolvante de  $H$  au point  $\mu$ .*

### 2.3 Conséquence immédiates.

Il était déjà connu que le théorème d'absorption limite (2.2) sur un intervalle implique l'absence de spectre singulier continu dans cet intervalle. Pour voir cela (c'est détaillé dans [RS4]), on utilise la formule de Stone suivante : pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,

$$\left\langle \phi, (1/2) \left( P_H([a; b[) + P_H([a; b]) \right) \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \pi^{-1} \int_a^b \Im \left\langle \phi, \left( (\mu + i\epsilon)I - H \right)^{-1} \phi \right\rangle d\mu.$$

Grâce à la formule, pour  $\epsilon > 0$  et  $\phi \in \mathcal{H}$ ,

$$\left( (\mu + i\epsilon)I - H \right)^{-1} \phi = \pm \int_0^{+\infty} e^{-t\mu \pm i\epsilon t} e^{\mp it(H - \mu)} dt \quad (2.4)$$

(cf. [Y]), on s'attend à partir de (2.2) à en déduire un contrôle sur le propagateur  $\exp(-itH)$  de  $H$ . C'est le cas et les estimations obtenues sont du type, pour  $s > 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| \langle A \rangle^{-s} e^{-itH} P_H([a; b]) \right\|^2 dt < \infty \quad (2.5)$$

et même (sous des hypothèses un peu plus fortes)

$$\left\| \langle A \rangle^{-s} e^{-itH} P_H([a; b]) \right\| = O(\langle t \rangle^{1-s}) \quad (2.6)$$

(cf. [JMP]). Ce sont des estimations de propagations faibles, respectivement fortes. L'argument essentiel pour les déduire de (2.2) est la théorie de Kato des opérateurs localement  $H$ -lisses (cf. [ABG, RS4]).

L'intérêt principal de la théorie de Mourre se situe dans la théorie de la diffusion (des collisions, "scattering" en anglais). Par exemple, on peut en déduire l'existence et la complétude d'opérateurs d'onde. Si  $A$  est un opérateur conjugué à  $H$  sur un intervalle  $J$  et si  $H_1$  est un autre opérateur auto-adjoint tel que

$$(iI - H_1)^{-1} - (iI - H)^{-1}$$

soit un opérateur compact alors les opérateurs d'onde

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH} P_H(J \setminus \sigma_{\text{pp}}(H))$$

existent et sont complets (cf. [JMP]). Le symbole  $s - \lim$  désigne une limite forte et signifie que, pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH} P_H(J \setminus \sigma_{\text{pp}}(H)) \phi$$

existe dans  $\mathcal{H}$ . La notion de complétude se traduit par l'existence d'une limite forte similaire.

Mais c'est probablement dans la théorie stationnaire de la diffusion que l'impact de la théorie de Mourre est le plus important. Bons nombres d'objets du scattering (opérateur de scattering, matrice de scattering, sections efficaces totales, opérateur temps retard) s'écrivent en fonction d'une valeur au bord de la résolvante (cf. [Y]). Le mot stationnaire vient du fait que le temps a été éliminé dans la formule (2.4). Cette approche de la théorie de la diffusion va plus loin que la méthode temporelle mais exige, en général des hypothèses plus fortes. Elle semble plus adaptée pour étudier les résonances d'une part et pour obtenir des résultats semi-classiques d'autre part.

Historiquement, c'est plutôt l'estimation de Mourre (2.1) qui a fait le plus de bruit. En plus du résultat de Mourre, cette estimation a des conséquences intéressantes. En se limitant aux opérateurs à  $N$  corps (que l'on verra en détail dans la partie 3), elle permet de montrer l'absence de valeur propre sur une demi-droite (cf. [FH2, CFKS]). Elle permet aussi d'établir des estimations de propagation (plus générales que les précédentes et obtenues par des méthodes temporelles) qui sont la clé de la preuve de la complétude asymptotique. On abordera ce point dans la partie 3.

## 2.4 Champs d'application connus.

Il y a de nombreuses applications connues de la théorie de Mourre. On va en voir une liste assez large en détaillant plus ou moins les différents exemples. Bien sûr, ces applications relèvent de la théorie de la diffusion (scattering).

Pour commencer, il y a des applications dans le cadre de la théorie de la relativité générale, en particulier dans des travaux de J.P. Nicolas et de D. Häfner (tous deux à Bordeaux I). En théorie des champs, il y a aussi des applications. On peut citer des travaux de Skibsted et de Bach-Fröhlich-Sigal.

Une application instructive, avec une motivation peut-être plus mathématique que physique, concerne les opérateurs de multiplication. Voyons ceci d'un peu plus près (des détails sont dans [ABG]). Étant donnée une fonction  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , on considère l'opérateur  $H$ , agissant dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , de domaine  $\mathcal{D}(H) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); hf \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ , qui à  $f \in \mathcal{D}(H)$  associe  $hf$ . Ce cas a un intérêt pédagogique car beaucoup de choses peuvent être décrites simplement. Il se trouve de plus que cet exemple est utilisé dans [ABG] pour établir des résultats d'optimalité de la théorie de Mourre (voir plus loin). Enfin le théorème d'absorption limite au point  $\lambda$  implique l'existence des distributions

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( h(\cdot) - \lambda \mp i\epsilon \right)^{-1}.$$

Ici  $(h(\cdot) - \lambda \mp i\epsilon)^{-1}$  désigne l'opérateur de multiplication par la fonction  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto (h(x) - \lambda \mp i\epsilon)^{-1}$ . Selon [ABG], la version moderne de la théorie de Mourre permet de traiter ainsi une classe très large de fonction  $h$ .

Un cas d'application très important concerne les opérateurs de Schrödinger, ainsi que quelques variantes. Rappelons tout d'abord quels sont ces opérateurs en distinguant le cas à deux corps du cas à  $N \geq 3$  corps. On se place dans un cadre volontairement restreint (on ne considère pas le cas physique) pour illustrer la théorie dans une situation simple. Soit  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. L'opérateur de Schrödinger est l'opérateur auto-adjoint  $H$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ , de domaine  $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ , qui  $f \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  associe  $-\Delta f + Vf$  (où  $\Delta$  désigne le laplacien dans  $\mathbb{R}^d$ ).

Dans le cas à deux corps, la variable  $x \in \mathbb{R}^d$  représente la position relative des deux corps. Dans ce cas, on suppose que l'interaction décrite par  $V$  tend vers 0 à l'infini. Dans le cas à  $N \geq 3$  corps,  $V$  est une somme d'interaction bilatérales qui décroissent à l'infini. Typiquement, pour  $j, k \in \{1, \dots, N\}$  avec  $j < k$ , soit  $V_{jk} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  l'interaction entre la particule  $j$  et la particule  $k$ . On repère la particule  $j$  par  $x_j \in \mathbb{R}^3$  et on pose  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ .  $V$  est alors donné par

$$V(x) = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N V_{jk}(x_j - x_k).$$

On voit que  $V$  ne tend pas vers 0 à l'infini, même si l'on fixe le centre de gravité à l'origine. C'est une difficulté spécifique du problème à  $N$  corps, que l'on retrouvera dans la partie 3. L'opérateur conjugué est l'opérateur auto-adjoint  $A$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ , de domaine  $\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}); x \cdot \nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})\}$ , qui à  $f \in \mathcal{D}(A)$  associe  $-(i/2)(x \cdot \nabla f + \nabla \cdot xf)$ . Bien sûr, le gradient  $\nabla f$  est pris au sens des distributions. Il se trouve que  $A$  engendre le groupe  $U(t)$  donné par  $U(t)f = \exp(-td/2)f(\exp(-t)\cdot)$ . De plus, comme forme sur  $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \cap \mathcal{D}(A)$ , on a  $[-\Delta, iA] = -2\Delta$ . Le groupe  $U(t)$  est utile pour vérifier les hypothèses (a)–(d). Pour l'estimation de Mourre (2.1), on utilise la positivité du laplacien. Le cas à deux corps est étudié en détail dans le paragraphe 2.6. Dans le cas à  $N$  corps, l'établissement de l'estimation de Mourre est plus délicat (cf. [SS, FH1] et partie 3). On



l'obtient en dehors des "seuils" de l'opérateur. Donnons un exemple de seuil dans le cas où  $N = 3$ . En groupant deux particules et en les séparant de la troisième, on considère l'opérateur de Schrödinger associé à ces deux particules comme si elles étaient isolées. Une valeur propre de cet opérateur est un seuil pour le système constitué des 3 particules.

Donnons quelques variantes du cadre précédent. Tout d'abord, on peut regarder un opérateur de Schrödinger (à deux corps) avec champ magnétique extérieur. Étant donné  $A_m : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$ , le potentiel magnétique et un potentiel électrique  $V$  comme avant, on considère l'opérateur

$$\left| i\nabla_x + A_m(x) \right|^2 + V(x).$$

Il y a quelques résultats concernant la théorie de Mourre pour un tel modèle.

Si l'on revient l'opérateur de Schrödinger à deux corps sans champ magnétique, on peut aussi s'intéresser à des résultats semi-classiques. Par exemple, on peut contrôler le comportement de la valeur au bord de la résolvante (2.3) lorsque  $\mu \rightarrow +\infty$ . On peut également considérer  $P_h = -h^2\Delta + V$  lorsque  $0 < h \rightarrow 0$ . Dans ce cas, sous une hypothèse de non-capture à l'énergie  $\lambda$  sur le flot hamiltonien engendré par  $|\xi|^2 + V(x)$ , on obtient une estimation de Mourre (2.1) pour le "commutateur"  $[P_h, iA_h]/h$ , où  $A_h = -(i/2)(x \cdot h\nabla f + h\nabla \cdot xf)$ . On obtient alors une borne  $O(1/h)$  pour (2.2). Il est à noter que, si la condition de non-capture est violée, (2.2) peut être au plus  $O(\exp(c/h))$  ( $c > 0$ ) et que cela se produit lorsqu'il y a des résonances de partie imaginaire  $O(\exp(-c/h))$  ( $c > 0$ ). Si l'on remplace l'opérateur  $P_h$  par un opérateur matriciel du même type ou si l'on considère l'opérateur de Dirac semi-classique (sans champ magnétique), il y a aussi quelques résultats dans cette direction.

Enfin, signalons une variante qui est en plein développement : les guides d'onde. Typiquement, on considère un tube infini plongé dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) et on considère le laplacien avec condition de Dirichlet dans le tube. On peut appliquer la théorie de Mourre aux énergies strictement positives et en dehors des valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur la section du tube.

## 2.5 Stratégie générale et extensions.

Dans ce paragraphe, on va décrire la stratégie générale pour obtenir (2.2). On donnera aussi des extensions de la théorie originale de Mourre.

L'idée de base de la théorie de Mourre est de perturber l'opérateur  $H - zI$  et d'obtenir des estimations a priori sur la résolvante du perturbé. La perturbation se fait par un opérateur borné qui a un signe et ce signe est choisi pour éliminer la singularité de la résolvante lorsque  $\Im z \rightarrow 0$ . Plus précisément, on perturbe par  $-i\epsilon B^*B$ , où  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  et où  $\epsilon \Im z > 0$ ,  $\Re z \in [a; b]$ . On contrôle

$$\left( H - zI - i\epsilon B^*B \right)^{-1} \tag{2.7}$$

uniformément en  $|\epsilon|$ ,  $|\Im z|$ . L'opérateur  $B$  est choisi en relation avec l'estimation de Mourre (2.1) puisque l'on prend, pour un certain  $\delta' > 0$ ,

$$B^*B = P_H(\lambda; \delta') [H, iA]^0 P_H(\lambda; \delta'). \tag{2.8}$$

De ces estimations a priori, on tire une inégalité différentielle de la forme

$$\|(d/d\epsilon)F_z(\epsilon)\| \leq g(\epsilon; \|F_z(\epsilon)\|), \quad (2.9)$$

pour une certaine fonction  $g$ , indépendante de  $z$  et  $\epsilon$ . En écrivant

$$F_z(\epsilon) - F_z(1) = \int_1^\epsilon (d/d\epsilon')F_z(\epsilon') d\epsilon', \quad (2.10)$$

on récupère une inégalité portant sur  $\|F_z(\epsilon)\|$  que l'on peut coupler avec une estimation a priori sur  $\|F_z(\epsilon)\|$  du type  $\|F_z(\epsilon)\| \leq C/\epsilon$  pour améliorer cette dernière jusqu'à obtenir  $\|F_z(\epsilon)\| \leq C$ , uniformément par rapport à  $z$  et  $\epsilon$ .

Du point de vue heuristique, l'idée précédente est reliée à la théorie analytique des résonances d'Aguiar-Balslev-Combes. Formellement, celle-ci consiste à dilater analytiquement l'opérateur auto-adjoint  $H$  sous la forme  $H(\theta) = \exp(-i\theta A)H \exp(-i\theta A)$ , où  $A$  est un opérateur auto-adjoint et  $\theta \in \mathbb{C}$ . Formellement toujours,  $(dH/d\theta)(0) = [H, iA]$  et il est naturel, pour contrôler  $(H - zI)^{-1}$ , de vouloir passer par  $(H - zI - \theta[H, iA])^{-1}$  puisque  $H - zI - \theta[H, iA]$  est une approximation de  $H - zI$ , quand  $\theta \rightarrow 0$ .

Passons maintenant aux diverses extensions de la théorie originale de Mourre. Tout d'abord, Mourre a remplacé dans (2.2) les poids  $|A + i|^{-1}$  par les poids  $|A + i|^{-s}$ , pour tout  $s > 1/2$ . Pour cela, il suit sa théorie en remplaçant les  $|A + i|^{-1}$  par  $(|A| + 1)^{-s}(\epsilon|A| + 1)^{s-1}$ , pour  $1 \geq s > 1/2$ . Pour  $s \in \mathbb{R}$ , posons

$$\mathcal{H}^s(A) := \{f \in \mathcal{H}; (|A| + 1)^s f \in \mathcal{H}\}.$$

Le théorème d'absorption limite (2.2) peut se reformuler en disant que les opérateurs  $(H - zI)^{-1}$ , pour  $\Re z \in [a; b]$  et  $\Im z \neq 0$ , sont uniformément bornés comme opérateurs de  $\mathcal{H}^s(A)$  dans son dual  $\mathcal{H}^{-s}(A)$ , pour tout  $s \geq 1$  dans la version originale et pour tout  $s > 1/2$  dans la version améliorée évoquée juste au-dessus. Ensuite, il a encore amélioré les poids. Pour un espace de type Besov  $\mathcal{B}(A)$  tel que, pour tout  $s > 1/2$ ,  $\mathcal{H}^s(A) \subset \mathcal{B}(A)$ , il a établi que les opérateurs  $(H - zI)^{-1}$ , pour  $\Re z \in [a; b]$  et  $\Im z \neq 0$ , sont uniformément bornés comme opérateurs de  $\mathcal{B}(A)$  dans son dual  $\mathcal{B}(A)^*$ . Pour  $H = -\Delta$  et  $A$  le générateur des dilatations  $-(x \cdot i\nabla + i\nabla \cdot x)/2$ , l'espace  $\mathcal{B}(A)$  est optimal pour le théorème d'absorption limite (cf. [H]).

On peut aussi améliorer les hypothèses techniques (a) – (d). Il se trouve que les hypothèses (a) – (c) implique que  $H \in C^1(A)$ , qui signifie qu'il existe  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(itA)(zI - H)^{-1} \exp(-itA)\phi \in \mathcal{H}$  est de classe  $C^1$ . Cette propriété  $H \in C^1(A)$ , couplée avec les hypothèses (d) – (e), donne le résultat du théorème 2.2. Mais on peut encore affaiblir ce jeu d'hypothèses. Tandis que  $H \in C^1(A)$  et l'hypothèse (d) implique que  $H \in C^2(A)$ , il suffit d'avoir l'estimation de Mourre (2.1) (i.e. l'hypothèse (e)) et  $H \in C^{1,1}(A)$ , où  $C^{1,1}(A)$  est un certain interpolé réel strictement compris entre  $C^2(A)$  et  $C^1(A)$ , pour récupérer les résultats du théorème 2.2. De plus, en considérant le cas où  $H$  est un opérateur de multiplication, on peut montrer que la régularité  $H \in C^{1,1}(A)$  est optimale. On renvoie à [ABG] pour plus de détails.

Une autre extension est intéressante. On la désigne par la méthode des commutateurs multiples. Essentiellement, on suppose que  $H \in C^k(A)$  avec  $k \geq 2$  et l'hypothèse (e) et on obtient que les valeurs au bord de la résolvante (2.3) sont des fonctions  $C^{k-2}$  de  $\mu$ .

Ce type de propriété permet d'améliorer les estimations de propagation faible (2.5) en estimations de propagation fortes (2.6) avec une meilleure décroissance en  $t$  du majorant, du genre  $O(\langle t \rangle^{-N(k)})$ , pour un certain entier  $N(k)$ . Voir [JMP, ABG].

Si l'on essaye de faire la théorie de Mourre en théorie de champs, on tombe souvent sur la difficulté suivante : la forme  $[H, iA]$  n'est pas bornée de  $\mathcal{D}(H)$  dans  $\mathcal{H}$ . Une idée pour contourner cette difficulté est formellement de décomposer  $[H, iA]$  en  $M+B$  où  $M \geq c > 0$  est "gros" et où  $B$  est borné de  $\mathcal{D}(H)$  dans  $\mathcal{H}$ . Cela fonctionne dans certains cas (voir des papiers de Skibsted, de Georgescu-Gérard-Møller).

Si, dans l'hypothèse (e), on a seulement  $\alpha \geq 0$ , le résultat du théorème 2.2 peut être faux. Il y a un exemple dans [ABG] et le rôle de  $H$  est encore tenu par un opérateur de multiplication.

Un autre résultat dans [ABG] dit que, si  $H$  est un opérateur auto-adjoint admettant dans un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  du spectre purement absolument continu et de multiplicité fixe alors  $H$  admet un opérateur conjugué sur  $J$ . Il est intéressant de noter que, pour l'opérateur de Schrödinger à  $N$  corps, il y a un changement de multiplicité du spectre aux seuils de l'opérateur. Il n'est donc pas étonnant qu'on s'en écarte pour établir l'estimation de Mourre.

Pour terminer ce paragraphe, signalons un incident concernant l'exposition de la théorie de Mourre dans le livre [CFKS]. Dans une hypothèse, il y a manifestement une erreur de frappe. Mais, il semble que les auteurs, qui donnaient des hypothèses de leur cru, se soient légèrement trompée sur l'une d'elles. Une rectification a été donnée par Georgescu-Gérard dans [GG]. On indiquera ce point plus en détail dans le sous-paragraphe 2.7.2.

## 2.6 Comment appliquer la théorie ?

Dans ce paragraphe, on va voir qu'il y a des difficultés a priori pour appliquer la théorie de Mourre. Pour illustrer ce point et pour vérifier explicitement que la théorie s'applique à une large classe d'opérateurs de Schrödinger à deux corps, on montrera que, dans ce cas, les hypothèses du théorème 2.2 sont remplies en tout point  $\lambda > 0$ . En considérant d'autres cas particuliers, on reviendra sur le problème d'appliquer la théorie à ces cas.

Signalons tout d'abord des difficultés générales pour appliquer la théorie de Mourre. Une première chose à faire est de "trouver un commutateur positif", c'est-à-dire de trouver un opérateur auto-adjoint  $A$  tel que l'estimation de Mourre (2.1) soit satisfaite. Cela peut déjà posé des problèmes car l'estimation est globale. Si l'on pense au cas où les opérateurs sont pseudo-différentiels, il faut une positivité sur toute la surface d'énergie. Ensuite, il s'agit de vérifier les hypothèses techniques (a) – (d). Cela peut s'avérer délicat. Dans le cas où  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  et où l'opérateur conjugué  $A$  engendre une représentation dans  $\mathcal{H}$  d'une famille  $\gamma_t$  de transformations de  $\mathbb{R}^d$  (i.e.  $Af = ((d/dt)(f \circ \gamma_t))(0)$ ), il est alors relativement aisé de vérifier ces hypothèses. Enfin, il n'est pas plutôt difficile de savoir si le théorème d'absorption limite cherché est vrai.

En considérant un cas simple d'opérateur de Schrödinger à deux corps, on va voir comment on peut deviner un opérateur conjugué et montrer en détail comment on vérifie les hypothèses de la théorie de Mourre.

Soit  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  et  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  tel que, pour un  $\rho > 0$ ,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \|\partial_x^\alpha V(x)\| = O_\alpha(\langle x \rangle^{-\rho-|\alpha|}). \quad (2.11)$$

L'opérateur  $H = -\Delta_x + V$  est auto-adjoint sur le domaine du laplacien  $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ . Notons que  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  est un coeur pour  $H$ . Soit  $\lambda > 0$ . On cherche un opérateur  $A$ , conjugué à  $H$  au point  $\lambda$ .

On devine  $A$ . Comme  $H$  peut être vu comme un opérateur pseudodifférentiel, il est naturel de chercher  $A$  dans cette classe. Comme on veut  $A$  auto-adjoint, on travaille avec la quantification de Weyl. Ainsi,  $H = h^w$ , quantifié de Weyl du symbol  $h(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$  et on pose  $A = a^w$ , le quantifié de Weyl d'un symbol  $a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ . Formellement,  $[H, iA] = \{h, a\}^w + \text{"petit"}$ . D'après l'inégalité de Gårding, on sait que l'on peut essentiellement transférer à l'opérateur une positivité sur le symbol. On cherche donc à avoir  $\{h, a\} \geq c > 0$  sur  $h^{-1}(\lambda)$ . Compte tenu du fait que l'estimation de Mourre (2.1) tolère une perturbation compacte, il suffit d'avoir  $\{h, a\} \geq c > 0$  sur  $h^{-1}(\lambda) \setminus K$ , pour un certain compact  $K$ . En notant par  $\phi^t(x, \xi) = (q(t; x, \xi), p(t; x, \xi))$  le flot hamiltonien engendré par  $h$ , on a  $\{h, a\} \circ \phi^t = (d/dt)(a \circ \phi^t)$ . Donc la positivité cherchée est en fait une stricte croissance en  $t$  de  $a \circ \phi^t$ , uniformément sur  $h^{-1}(\lambda) \setminus K$ .

Dans le cas  $V = 0$ , on sait que  $q(t; x, \xi) \cdot p(t; x, \xi) = (x + 2t\xi)\xi$  est strictement croissante puisque  $|\xi|^2 = \lambda > 0$  (le produit  $q \cdot p$  est naturel en scattering classique). Grâce à (2.11), cela marche encore en dehors d'un compact en  $x$ . En effet, on a  $\{h, x \cdot \xi\} = 2|\xi|^2 - x \cdot \nabla V(x) \geq \lambda$  sur  $h^{-1}(\lambda) \setminus K$ , avec  $K = \{(x, \xi) \in h^{-1}(\lambda); |x| \leq R\}$  pour un certain  $R > 0$  assez grand. On prend donc  $A = (x \cdot \xi)^w$ .

Il se trouve que  $A$  agit au sens des distributions comme  $-(x \cdot i\nabla + i\nabla \cdot x)/2$  sur  $\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{H}; x \cdot \nabla f \in \mathcal{H}\}$ . Il est auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$  et  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  est un coeur pour  $A$ . De plus, il engendre le groupe  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$  défini par

$$\forall f \in \mathcal{H}, U_t f = e^{-td/2} f(e^{-t} \cdot).$$

On a donc  $U_t = \exp(-itA)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Vérifions maintenant les hypothèses (a) – (e). Dans son papier original, Mourre avait vu que la vérification de l'hypothèse (c) dans un cas pratique pouvait s'avérer délicate. Aussi, pour la faciliter, il a introduit l'hypothèse (c') suivante et montré la proposition suivante.

**Définition 2.5.** Soit  $A, H$  deux opérateurs  $A, H$  auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$ . On dit qu'ils vérifient la propriété (c') s'il existe un ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  tel que :

1. For all  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(-itA)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ ,
2.  $\mathcal{S}$  est un coeur pour  $H$ ,
3. la forme  $[H, iA]$ , définie sur  $\mathcal{S}^2$ , est bornée inférieurement et fermable et le domaine de l'opérateur auto-adjoint  $[H, iA]_{\mathcal{S}}^0$ , associé à sa fermeture, contient  $\mathcal{D}(H)$ .

**Proposition 2.6.** Soit  $A, H$  deux opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$  satisfaisant les hypothèses (a), (b) et (c'). Alors, pour tout  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ ,  $\langle \phi, [H, iA]\psi \rangle = \langle \phi, [H, iA]_{\mathcal{S}}^0 \psi \rangle$ . En particulier, la forme  $[H, iA]$ , définie sur  $(\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A))^2$ , est bornée inférieurement et fermable et l'opérateur auto-adjoint  $[H, iA]_{\mathcal{S}}^0$ , associé à sa fermeture, coïncide avec  $[H, iA]_{\mathcal{S}}^0$ .

On **admet** cette proposition et on retourne à notre opérateur de Schrödinger. Comme  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \subset \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  et  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  est un coeur pour  $H$ , l'hypothèse (a) est satisfaite. Puisque  $\exp(-itA) = U_t$ , on voit que l'hypothèse (b) est aussi satisfaite.

Comme commutateur d'opérateur différentiels,  $[-\Delta, iA] = 2(-\Delta)$  et  $[-\Delta + V, iA] = 2(-\Delta) - x \cdot \nabla V(x)$ . En particulier la forme  $q = [-\Delta + V, iA]$ , définie sur  $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))^2$  est bornée inférieurement. Elle est fermable car la norme  $\|\cdot\|_q$  qu'elle définit est majorée par un multiple de la norme  $H^2$ . En particulier, en posant  $\mathcal{S} = C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ ,  $[H, iA]_{\mathcal{S}}^0$  agit sur  $\mathcal{D}(H) = H^2$  par  $2(-\Delta) - x \cdot \nabla V(x)$ . Comme  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  est un coeur pour  $H$  et est stable sous l'action de  $U_t$ , on peut appliquer la proposition 2.6. L'hypothèse (c) est donc satisfaite et l'opérateur auto-adjoint  $[H, iA]^0$  agit sur  $\mathcal{D}(H)$  par  $2(-\Delta) - x \cdot \nabla V(x)$ .

Pour  $R > 0$ , soit  $\chi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  tel que  $0 \leq \chi_R \leq 1$ ,  $\chi_R = 1$  sur  $\{x \in \mathbb{R}^d; |x| \leq R\}$  et  $\chi_R$  est supportée dans  $\{x \in \mathbb{R}^d; |x| \leq R + 1\}$ . On a

$$\begin{aligned} [-\Delta + V, iA] &= 2(-\Delta) - x \cdot \nabla V(x) \\ &= 2(-\Delta + V(x)) - 2V(x) - x \cdot \nabla V(x) \\ &= 2(-\Delta + V(x)) - \chi_R(x)(2V(x) + x \cdot \nabla V(x)) \\ &\quad - (1 - \chi_R(x))(2V(x) + x \cdot \nabla V(x)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le dernier terme de (2.12) tend, d'après (2.11), vers 0 en norme quand  $R \rightarrow \infty$ . De plus, si  $\theta, \tilde{\theta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$ , à support près de  $\lambda$ , telles que  $\theta \cdot \tilde{\theta} = \tilde{\theta}$ , alors  $\tilde{\theta}(H)\chi_R(x)(2V(x) + x \cdot \nabla V(x))$  est un opérateur compact. Soit  $\epsilon = \inf \text{supp } \theta > 0$ . Pour  $R$  assez grand, il existe un opérateur compact  $K$  tels que

$$\theta(H) [H, iA] \theta(H) \geq (2H - \epsilon)\theta^2(H) + \theta(H) K \theta(H) \geq \epsilon\theta^2(H) + \theta(H) K \theta(H).$$

On a donc l'estimation de Mourre (2.1). En utilisant le calcul différentiel, on peut aussi montrer que l'hypothèse (d) est satisfaite. Mieux, on peut considérer les commutateurs multiples suivants :  $ad_A^0(H) = H$  et  $ad_A^{k+1}(H) = [ad_A^k(H), iA]$ . Il se trouve qu'ils sont aussi bornés de  $\mathcal{D}(H)$  dans  $\mathcal{D}(H)^*$ . En particulier, cette propriété supplémentaire permet d'obtenir la régularité de la valeur au bord de la résolvante par rapport à l'énergie.

En tout cas, on a essentiellement montré que la théorie de Mourre s'applique à  $H$  en tout point  $\lambda > 0$ . En particulier, le théorème d'absorption limite (2.2) est valide. Il est souvent plus commode de replacer les poids  $|A + i|^{-1}$  par des poids  $\langle x \rangle^{-1}$ . Vérifions que cela marche.

Soit  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$  avec  $\theta = 1$  sur  $[a; b]$ . Pour  $z$  décrivant  $\{\zeta; \Re \zeta \in [a; b], \Im \zeta \neq 0\}$ , les fonctions  $(z - t)^{-1}(1 - \theta(t))$  sont uniformément bornées. Donc, il existe un opérateur  $B$  uniformément borné, tel que

$$\langle x \rangle^{-1} (zI - H)^{-1} \langle x \rangle^{-1} = \langle x \rangle^{-1} \theta(H) (zI - H)^{-1} \theta(H) \langle x \rangle^{-1} + B.$$

En utilisant le calcul pseudo-différentiel, on peut montrer que  $|A + i|\theta(H)\langle x \rangle^{-1}$  est borné. En insérant  $|A + i| \cdot |A + i|^{-1}$  convenablement dans l'égalité précédente et en utilisant (2.2), on obtient

$$\sup_{\substack{\Re z \in [a; b] \\ \Im z \neq 0}} \left\| \langle x \rangle^{-1} (zI - H)^{-1} \langle x \rangle^{-1} \right\| < \infty.$$

Comme on la signalé plus haut, une amélioration de la théorie de Mourre permet d'obtenir, pour tout  $s > 1/2$ ,

$$\sup_{\substack{\Re z \in [a; b] \\ \Im z \neq 0}} \left\| \langle x \rangle^{-s} (zI - H)^{-1} \langle x \rangle^{-s} \right\| < \infty .$$

Pour terminer ce paragraphe, considérons des situations voisines de celle que l'on vient d'étudier. On prend  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$  et  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_m(\mathbb{C}))$ , à valeurs auto-adjointes, tel que, pour un  $\rho > 0$ ,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \|\partial_x^\alpha V(x)\|_m = O_\alpha(\langle x \rangle^{-\rho-|\alpha|}) . \quad (2.13)$$

Ici  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  désigne l'algèbre des matrices carrées  $m \times m$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et  $\|\cdot\|_m$  la norme d'opérateur naturelle sur  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ . On note par  $I_m$  la matrice identité correspondante. L'opérateur  $H$  est  $P^w$  où  $P(x, \xi) = |\xi|^2 I_m + V(x)$ . On peut refaire l'analyse précédente avec l'opérateur conjugué  $A$  donné par l'opérateur scalaire  $(x \cdot \xi)^w I_m$ . Tout va bien car  $[H, iA] = ([P, (x \cdot \xi) I_m])^w + \{P, (x \cdot \xi) I_m\}^w + \text{"petit"} = 0 + \{P, (x \cdot \xi) I_m\}^w + \text{"petit"} !$  Le cas semi-classique  $H = -h^2 \Delta I_m + V(x)$  est assez différent, y compris dans le cas scalaire ( $m = 1$ ). Essentiellement, la théorie de Mourre fonctionne en suivant la dépendance en  $h$  si l'on peut obtenir l'estimation de Mourre (2.1) avec  $K = 0$  pour le commutateur  $h^{-1}[H, iA]$ . Là encore il est naturel de chercher  $A$  sous la forme  $B_h^w$ , le  $h$ -quantifié de Weyl du symbol matriciel  $B$ . À cause du développement de  $h^{-1}[H, iA]$  en puissance de  $h$ , on a besoin de  $[P, B] = 0$  et  $\{P, B\} \geq c I_m$  sur la surface d'énergie  $\det(P - \lambda) = 0$ . Mais dans certain cas avec  $m > 1$ , il n'existe pas de tel symbol  $B$ ! (cf. [J1]). C'est pourquoi, une autre approche a été récemment introduite (cf. [J2]).

Dans le cas  $m = 1$ , les choses sont bien comprises. On a besoin d'avoir  $\{P, B\} \geq c$  sur  $P^{-1}(\lambda)$ . Si le flot engendré par  $P$  est non-captif à l'énergie  $\lambda$ , on peut trouver une telle fonction  $B$  et on obtient une borne en  $O(1/h)$  pour les valeurs au bord de la résolvante (cf. [GM]). De plus, c'est optimal. Une telle borne sur les valeurs au bord de la résolvante implique en effet l'hypothèse de non-capture précédente (cf. [W]).

## 2.7 Détails de la théorie.

Dans ce paragraphe, on démontre en grande partie le théorème 2.2. La stratégie de la preuve a été introduite dans le paragraphe 2.5. On admet tout d'abord des résultats techniques (cf. sous-paragraphe 2.7.1). Ensuite on démontre le théorème du viriel qui implique le point 1. du théorème 2.2 (cf. sous-paragraphe 2.7.2). On étudie ensuite la résolvante approchée (2.7) pour un  $B^*B$  arbitraire (cf. sous-paragraphe 2.7.3). On choisit ensuite  $B^*B$  (cf. sous-paragraphe 2.7.4) et on démontre des estimations a priori sur résolvante approchée (cf. sous-paragraphe 2.7.5). En dérivant par rapport à  $\epsilon$  la résolvante approchée, on en déduit une inégalité différentielle du type (2.9). En combinant cette inégalité différentielle et les estimations a priori précédentes, on améliore ces dernières, ce qui donne le point 2 du théorème 2.2 (cf. sous-paragraphe 2.7.7).

### 2.7.1 Résultats basiques admis.

On admet la proposition suivante qui regroupe un certain nombre de résultats basiques de théorie spectrale. Donnons d'abord quelques notations. On note par  $\hat{g}$  la transformée de Fourier d'une fonction  $g$ . Pour  $\gamma \in \mathbb{R}$ , avec  $|\gamma| \geq 1$ , soit  $f_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f_\gamma(t) = i\gamma t(i\gamma + t)^{-1}$ . Elle est uniformément bornée en  $\gamma$ .

**Proposition 2.7.** *Soit  $A, H$  deux opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$  satisfaisant les hypothèses (a), (b) et (c). Pour tout  $z \notin \sigma(H)$ ,  $(zI - H)^{-1}\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ . Pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ , avec  $|\gamma|$  assez grand,  $(i\gamma I + A)^{-1}\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ ,  $(iI + H)i\gamma(i\gamma I + A)^{-1}(iI + H)^{-1}$  est uniformément borné par rapport à  $\gamma$  et il converge fortement vers  $I$  lorsque  $|\gamma| \rightarrow \infty$ . Pour  $|\gamma|$  assez grand,  $f_\gamma(A)\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ . Pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(H)$ , pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ ,*

$$\begin{aligned} \langle \phi, [H, f_\gamma(A)]\psi \rangle &= \langle \phi, [H, iA]^0 i\gamma(i\gamma I + A)^{-1}\psi \rangle \\ &\quad + \langle \phi, A(i\gamma I + A)^{-1}[H, iA]^0 i\gamma(i\gamma I + A)^{-1}\psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(H)$ ,

$$[H, iA]^0\psi = \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} [H, i f_\gamma(A)]\psi. \quad (2.15)$$

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne bornée telle que  $t\hat{g}(t) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . L'opérateur  $g(H)$  est linéaire continu de  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  dans  $\mathcal{D}(A)$ . De plus, il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ ,

$$\| (Ag(H) - g(H)A)\phi \| \leq c \|(iI + H)\phi\|. \quad (2.16)$$

Rappelons que, lorsque  $|\gamma| \rightarrow \infty$ ,  $B_\gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  converge fortement vers  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  si, pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ ,  $B_\gamma\phi \rightarrow B\phi$  dans  $\mathcal{H}$  lorsque  $|\gamma| \rightarrow \infty$ .

Prenons  $|\gamma|$  assez grand. Comme  $f_\gamma(A) = i\gamma A(i\gamma I + A)^{-1} = i\gamma + \gamma^2(i\gamma I + A)^{-1}$ ,  $f_\gamma(A)\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ . Pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(H)$ ,  $Hf_\gamma(A)\psi - f_\gamma(A)H\psi$  est donc bien défini.

### 2.7.2 Théorème du viriel et valeurs propres.

Ici, on démontre le théorème du viriel et on en déduit le point 1 du théorème 2.2. On détaille "l'erreur" de [CFKS], évoquée dans le paragraphe 2.5, ainsi que la correction apportée par [GG].

**Proposition 2.8 (Théorème du viriel).** *Soit  $A, H$  deux opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$  satisfaisant les hypothèses (a), (b) et (c). Si  $\psi$  est un vecteur propre de  $H$  alors  $\langle \psi, [H, iA]^0\psi \rangle = 0$ .*

**Preuve :** Par hypothèse,  $\psi \in \mathcal{D}(H)$  et  $H\psi = E\psi$  pour un certain  $E \in \mathbb{R}$ . D'après (2.15),

$$\begin{aligned} \langle \psi, [H, iA]^0\psi \rangle &= \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \langle \psi, [H, i f_\gamma(A)]\psi \rangle \\ &= \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \left( \langle H\psi, i f_\gamma(A)\psi \rangle - \langle \bar{f}_\gamma(A)\psi, iH\psi \rangle \right) \\ &= \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} E \left( \langle \psi, i f_\gamma(A)\psi \rangle - \langle \bar{f}_\gamma(A)\psi, i\psi \rangle \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Preuve du point 1. du théorème 2.2 :** On utilise les hypothèses (a), (b), (c) et (e). Supposons que, dans  $]\lambda - \delta; \lambda + \delta[$ , il y ait une suite  $(E_n)_n$  de valeurs propres de  $H$  et une famille orthonormale  $(\psi_n)_n$  telle que  $H\psi_n = E_n\psi_n$ , pour tout  $n$ . On a bien sûr  $P_H(\lambda, \delta)\psi_n = \psi_n$ , pour tout  $n$ . Par le théorème du viriel (proposition 2.8) et l'hypothèse (e), on a, pour tout  $n$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi_n, [H, iA]^0 \psi_n \rangle = \langle \psi_n, P_H(\lambda, \delta)[H, iA]^0 P_H(\lambda, \delta)\psi_n \rangle \\ &\geq \alpha \|\psi_n\|^2 + \langle \psi_n, K\psi_n \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $(\psi_n)_n$  est orthonormale, elle converge faiblement vers 0. Comme  $K$  est compact,  $K\psi_n$  converge fortement vers 0 et on obtient  $0 \geq \alpha \cdot 1 + 0$ , à la limite. Contradiction avec  $\alpha > 0$ .  $\square$

Voyons maintenant le problème posé par le théorème du viriel tel qu'il est donné dans [CFKS]. On suit [GG], où l'on trouvera plus de détails. Dans [CFKS], le résultat du théorème du viriel (cf. proposition 2.8) est annoncé sous les hypothèses suivantes :

1.  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  est dense dans  $\mathcal{D}(H)$  (pour la norme du graphe),
2. il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ ,

$$|\langle H\phi, iA\phi \rangle - \langle A\phi, iH\phi \rangle| \leq c(\|H\phi\|^2 + \|\phi\|^2),$$

3. il existe un opérateur  $H_0$ , auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$ , tel que  $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$ , la forme  $[H_0, iA]$  s'étend en un opérateur borné de  $\mathcal{D}(H_0)$  sur  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{D}(H_0A) \cap \mathcal{D}(A)$  est un coeur pour  $H_0$ .

La formulation de la troisième hypothèse est motivée par des considérations physiques. En physique, l'opérateur  $H$  est souvent une somme  $H_0 + V$  pour laquelle la troisième hypothèse est raisonnable. Comme cela est noté dans [GG], il y a probablement une faute de frappe dans cette troisième hypothèse. Comme  $\mathcal{D}(H_0A) = \{\phi \in \mathcal{D}(A); A\phi \in \mathcal{D}(H_0)\} \subset \mathcal{D}(A)$ , pourquoi ne pas écrire " $\mathcal{D}(H_0A)$  est un coeur pour  $H_0$ " ? Selon [GG], le dernier point de cette hypothèse devrait être :  $\mathcal{D}(H_0A) \cap \mathcal{D}(H_0)$  est un coeur pour  $H_0$ .

Il se trouve que le théorème du viriel (cf. proposition 2.8) peut être démontré sous les hypothèses

1. pour tout  $t$ ,  $\exp(itA)$  préserve  $\mathcal{D}(H)$ ,
2. il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ ,

$$|\langle H\phi, iA\phi \rangle - \langle A\phi, iH\phi \rangle| \leq c(\|H\phi\|^2 + \|\phi\|^2).$$

Il peut aussi être établi sous la condition " $H \in C^1(A)$ " (cf. paragraphe 2.5). En notant  $R_z = (zI - H)^{-1}$ , pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ , cette dernière peut être reformulée de manière équivalente par

$$\exists c > 0, \exists z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H); \forall \phi \in \mathcal{D}(A), |\langle R_z^* \phi, iA\phi \rangle - \langle A\phi, iR_z \phi \rangle| \leq c \|\phi\|^2$$

et par

1. il existe  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$  tel que,  $R_z$  et  $R_z^*$  préservent  $\mathcal{D}(A)$ ,



2. il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ ,

$$|\langle H\phi, iA\phi \rangle - \langle A\phi, iH\phi \rangle| \leq c(\|H\phi\|^2 + \|\phi\|^2).$$

En comparant avec les hypothèses (modifiées) de [CFKS], on constate qu'il manque dans ces dernières une condition de préservation de domaine : soit celui de  $A$  par  $R_z$  et  $R_z^*$  soit celui de  $H$  par  $\exp(itA)$ . En regardant la preuve dans [CFKS], on constate qu'implicitement il est supposé que  $(zI - H_0)^{-1}$  préserve  $\mathcal{D}(A)$ . Sans cette hypothèse cachée, il est montré dans [GG] que le résultat tel qu'il est annoncé dans [CFKS], après correction de la "faute de frappe", est faux. En particulier, il est montré que  $(i\gamma I + A)^{-1}\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$  est faux. Un contre-exemple relativement simple est donné. Étant donné un opérateur positif  $H_0$ , l'opérateur  $H$  est  $H_0 + \pi_\phi$ , où  $\pi_\phi$  est la projection orthogonale sur un certain  $\phi \in \mathcal{H}$ .

### 2.7.3 Résolvante approchée.

Dans ce paragraphe, on étudie l'opérateur  $H - zI - i\epsilon B^*B$ , pour  $B$  borné quelconque.

**Proposition 2.9.** *Soit  $H$  un opérateur auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$  et  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . L'opérateur  $H - zI - i\epsilon B^*B$  est inversible si  $\epsilon \Im z \geq 0$  et  $\Im z \neq 0$ . Son inverse  $G_z(\epsilon)$  est continu de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{D}(H)$  (muni de la norme du graphe) et vérifie  $\|G_z(\epsilon)\| \leq 1/|\Im z|$ . Si  $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  vérifie  $B'^*B' \leq B^*B$ , si  $\epsilon \Im z > 0$  et si  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  est auto-adjoint, alors*

$$\|B'G_z(\epsilon)C\| \leq |\epsilon|^{-1/2} \|CG_z(\epsilon)C\|^{1/2}. \quad (2.17)$$

**Preuve :** Comme  $B^*B$  est borné,  $H - zI - i\epsilon B^*B$  est un opérateur fermé sur  $\mathcal{D}(H)$ . En effet, si  $\mathcal{D}(H) \ni \psi_n \rightarrow \psi$  et  $(H - zI - i\epsilon B^*B)\psi_n \rightarrow \phi \in \mathcal{H}$ , pour la norme  $\|\cdot\|$  de  $\mathcal{H}$ , alors on va voir que  $\psi \in \mathcal{D}(H)$  et que  $\phi = (H - zI - i\epsilon B^*B)\psi$ . Par continuité de  $B^*B$ ,  $(zI + i\epsilon B^*B)\psi_n \rightarrow (zI + i\epsilon B^*B)\psi$ . Donc  $H\psi_n \rightarrow \phi + (zI + i\epsilon B^*B)\psi$ . Or  $H$  est fermé, donc  $\psi \in \mathcal{D}(H)$  et  $\phi + (zI + i\epsilon B^*B)\psi = H\psi$ .

De plus, pour  $\psi \in \mathcal{D}(H)$ ,

$$\langle \psi, (H - zI - i\epsilon B^*B)\psi \rangle = \langle \psi, (H - (\Re z)I)\psi \rangle - i(\Im z \|\psi\|^2 + \epsilon \|B\psi\|^2)$$

avec  $\langle \psi, (H - (\Re z)I)\psi \rangle \in \mathbb{R}$ . Donc, pour  $\epsilon \Im z \geq 0$ ,

$$\max(|\Im z| \|\psi\|^2, \epsilon \|B\psi\|^2) \leq |\langle \psi, (H - zI - i\epsilon B^*B)\psi \rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|(H - zI - i\epsilon B^*B)\psi\|.$$

Donc, pour  $\psi \neq 0$  et  $\Im z \neq 0$ ,  $|\Im z| \|\psi\| \leq \|(H - zI - i\epsilon B^*B)\psi\|$ . L'opérateur  $H - zI - i\epsilon B^*B$  est donc injectif et d'image fermée  $F$  dans  $\mathcal{H}$ . Par le théorème de l'application ouverte, l'inverse  $G_z(\epsilon)$  existe comme opérateur borné de  $F$  dans  $\mathcal{D}(H)$ .

On montre que  $F = \mathcal{H}$ . Si  $\phi \in F^\perp$  alors  $\phi \in \mathcal{D}((H - zI - i\epsilon B^*B)^*)$ , le domaine de l'adjoint de  $H - zI - i\epsilon B^*B$ . Donc  $\phi \in \mathcal{D}(H)$  et  $(H - \bar{z}I + i\epsilon B^*B)\phi = 0$ . Or, en répétant l'argument précédent, on a  $|\Im z| \|\phi\| \leq \|(H - \bar{z}I + i\epsilon B^*B)\phi\|$  avec  $\Im z \neq 0$ . On en déduit que  $\phi = 0$  et que  $F = \mathcal{H}$ . Les inégalités  $|\Im z| \|\psi\| \leq \|(H - zI - i\epsilon B^*B)\psi\|$ , pour tout  $\psi$ ,

impliquent  $\|G_z(\epsilon)\| \leq 1/|\Im z|$ .

Il reste à établir (2.17). En utilisant  $\|B'G_z(\epsilon)C\|^2 = \|CG_z(\epsilon)^*B'^*B'G_z(\epsilon)C\|$ , on a

$$\|B'G_z(\epsilon)C\|^2 \leq \frac{1}{2|\epsilon|} \|CG_z(\epsilon)^*2(\epsilon B^*B + (\Im z)I)G_z(\epsilon)C\|.$$

Par une formule des résolvantes,

$$G_z(\epsilon)^*2(\epsilon B^*B + (\Im z)I)G_z(\epsilon) = G_z(\epsilon)^* - G_z(\epsilon),$$

on en déduit

$$\|B'G_z(\epsilon)C\|^2 \leq \frac{1}{2|\epsilon|} \|C(G_z(\epsilon)^* - G_z(\epsilon))C\| \leq \frac{1}{2|\epsilon|} 2\|CG_z(\epsilon)C\|. \quad \square$$

#### 2.7.4 Choix de $B^*B$ .

Ici, on déduit de l'estimation de Mourre (2.1) une estimation "stricte" de Mourre (c'est-à-dire sans correction compacte) et on procède au choix de l'opérateur  $B$ .

**Proposition 2.10.** *Soit  $A, H$  deux opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$  satisfaisant les hypothèses (a), (b), (c) et (e). Soit  $\lambda' \in ]\lambda - \delta; \lambda + \delta[ \cap \sigma_{\text{cont}}(H) \setminus \sigma_{\text{pp}}(H)$ . Il existe  $\delta' > 0$  tel que*

$$P_H(\lambda', \delta') [H, iA] P_H(\lambda', \delta') \geq (\alpha/2) P_H(\lambda', \delta'). \quad (2.18)$$

**Preuve :** Comme  $\lambda' \in \sigma_{\text{cont}}(H)$ , la limite forte  $s - \lim_{\delta' \rightarrow 0} P_H(\lambda', \delta') = 0$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $\lim_{\delta' \rightarrow 0} P_H(\lambda', \delta')\psi = 0$ . Donc  $\lim_{\delta' \rightarrow 0} K P_H(\lambda', \delta') = 0$  en norme dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $K$  étant l'opérateur compact donné par l'estimation de Mourre (2.1). Pour  $\delta'$  assez petit, on déduit donc (2.18) de (2.1).  $\square$

**Remarque 2.11.** *Dans (2.18), on peut remplacer  $P_H(\lambda', \delta')$  par  $\chi(H)$ , où  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  à support dans  $]\lambda' - \delta'; \lambda' + \delta'[$  et valant 1 sur  $]\lambda' - \delta'/2; \lambda' + \delta'/2[$ .*

Soit  $A, H$  deux opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$  satisfaisant les hypothèses (a), (b), (c), (d) et (e). Soit  $\lambda'$  comme dans la proposition 2.10. Soit  $\chi$  la fonction introduite dans la remarque 2.11. L'opérateur  $\chi(H)[H, iA]^0\chi(H)$  est borné d'après l'hypothèse (c) et est positif d'après la proposition 2.10. Il existe donc un opérateur  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tel que  $B^*B = \chi(H)[H, iA]^0\chi(H)$ .

**Proposition 2.12.** *Soit  $A, H$  deux opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$  satisfaisant les hypothèses (a), (b), (c), (d) et (e). Soit  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  l'opérateur introduit ci-dessus. La forme  $[B^*B, A]$ , définie a priori sur  $\mathcal{D}(A)^2$ , peut être vue comme application linéaire continue de  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_H$  du graphe de  $H$ , dans  $\mathcal{D}(H)^*$ . De plus,  $G_z(\epsilon)\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ .*

**Preuve :** Pour montrer la première assertion, il suffit, d'après l'hypothèse (a), de montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ ,

$$|\langle \phi, [B^*B, A]\psi \rangle| \leq c \cdot \|(H + iI)\phi\| \cdot \|(H + iI)\psi\|. \quad (2.19)$$

Pour  $\tau \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ ,  $[\chi(H), A]\tau := \chi(H)A\tau - A\chi(H)\tau$  est bien défini d'après la proposition 2.7. Pour simplifier, on note par  $C$  l'opérateur auto-adjoint  $[H, iA]^0$ . Pour  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \phi, [B^*B, A]\psi \rangle &= \langle B^*B\phi, A\psi \rangle - \langle A\phi, B^*B\psi \rangle \\ &= \langle C\chi(H)\phi, \chi(H)A\psi \rangle - \langle \chi(H)A\phi, C\chi(H)\psi \rangle \\ &= \langle C\chi(H)\phi, [\chi(H), A]\psi \rangle + \langle C\chi(H)\phi, A\chi(H)\psi \rangle \\ &\quad - \langle A\chi(H)\phi, C\chi(H)\psi \rangle - \langle [\chi(H), A]\phi, C\chi(H)\psi \rangle \\ &= \langle C\chi(H)\phi, [\chi(H), A]\psi \rangle - \langle [\chi(H), A]\phi, C\chi(H)\psi \rangle \\ &\quad + \langle \chi(H)\phi, [C, A]\chi(H)\psi \rangle, \end{aligned}$$

où dans le dernier terme  $[C, A]$  est à prendre au sens des formes. Par l'hypothèse (d), il existe  $c_1 > 0$ , indépendant de  $\phi$  et  $\psi$ , tel que

$$|\langle \chi(H)\phi, [C, A]\chi(H)\psi \rangle| \leq c_1 \cdot \|(H + iI)\phi\| \cdot \|(H + iI)\psi\|.$$

D'après (2.16) et le fait que  $\chi$  est à support compact, on en déduit (2.19).

Par construction de  $G_z(\epsilon)$ , on sait déjà que  $G_z(\epsilon)\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(H)$ . On **admet** que  $G_z(\epsilon)$  préserve  $\mathcal{D}(A)$ .  $\square$

**Remarque 2.13.** *Des arguments de la preuve de la proposition 2.7 permettent de montrer que  $\mathcal{D}(A)$  est préservé par  $G_z(\epsilon)$ .*

### 2.7.5 Estimations a priori.

On se place dans le cadre défini au paragraphe 2.7.4 précédent. On a toujours  $\epsilon\Im z > 0$ . On prend désormais  $\Re z \in ]\lambda' - \delta'/4; \lambda' + \delta'/4[$ . Avec la notation de la remarque 2.3, on pose  $F_z(\epsilon) = \langle A \rangle^{-1} G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1}$ .

**Proposition 2.14.** *Dans les conditions précédentes, il existe  $\epsilon_0, c_1, c_2, c_3 > 0$  tel que, uniformément pour  $|\epsilon| \in ]0; \epsilon_0]$ ,  $\Im z \neq 0$  et  $\Re z \in ]\lambda' - \delta'/4; \lambda' + \delta'/4[$ , on ait  $\|F_z(\epsilon)\| \leq c_1 |\epsilon|^{-1}$  et, pour  $T = I$  et  $T = (H + iI)$ ,*

$$\|T\chi(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1}\| \leq c_2 |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}, \quad (2.20)$$

$$\|T(1 - \chi)(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1}\| \leq c_3 \left(1 + |\epsilon|^{1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}\right). \quad (2.21)$$

**Preuve :** Par la proposition 2.10 et la remarque 2.11, on peut appliquer la proposition 2.9 à  $B' = (\alpha/2)^{1/2}\chi(H)$  et à  $C = \langle A \rangle^{-1}$ . L'estimation (2.17) s'écrit

$$\|\chi(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1}\| \leq c |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2},$$

qui est (2.20) pour  $T = I$ . Soit  $\tau \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  telle que  $\tau\chi = \chi$ . Comme  $(H + i)\tau(H)$  est borné, l'estimation (2.20) pour  $T = I$  implique (2.20) pour  $T = (H + iI)$ .

Par la formule des résolvantes,

$$(1 - \chi)(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1} = (1 - \chi)(H)G_z(0)\left(I + i\epsilon B^* B G_z(\epsilon)\right)\langle A \rangle^{-1}.$$

On insère  $\chi(H) + (1 - \chi)(H)$  entre  $B^* B$  et  $G_z(\epsilon)$  et on obtient

$$\begin{aligned} & \left(I - (1 - \chi)(H)G_z(0) i\epsilon B^* B\right)(1 - \chi)(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1} \\ &= (1 - \chi)(H)G_z(0)\left(I + i\epsilon B^* B \chi(H) G_z(\epsilon)\right)\langle A \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

Comme  $(1 - \chi)(H)G_z(0) = (1 - \chi)(H)(zI - H)^{-1}$  est uniformément borné par rapport à  $z$  puisque  $\Re z \in ]\lambda' - \delta'/4; \lambda' + \delta'/4[$ , on peut, pour  $\epsilon_0$  assez petit et tout  $|\epsilon| \in ]0; \epsilon_0]$ , écrire  $(1 - \chi)(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1}$  sous la forme

$$\left(I - (1 - \chi)(H)G_z(0) i\epsilon B^* B\right)^{-1} (1 - \chi)(H)G_z(0)\left(I + i\epsilon B^* B \chi(H) G_z(\epsilon)\right)\langle A \rangle^{-1}.$$

On en déduit l'estimation, pour  $c, c'$  indépendants de  $z$  et  $\epsilon$ ,

$$\|(1 - \chi)(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1}\| \leq c \left(1 + \epsilon \cdot c' c_2 |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}\right).$$

Cela prouve (2.21) pour  $T = I$ . Comme  $(H + iI)(1 - \chi)(H)G_z(0)$  est uniformément borné par rapport à  $z$ , le même argument donne (2.21) pour  $T = H + iI$ . On a donc

$$\begin{aligned} \|F_z(\epsilon)\| &\leq \|\langle A \rangle^{-1} \chi(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1}\| + \|\langle A \rangle^{-1} (1 - \chi)(H)G_z(\epsilon)\langle A \rangle^{-1}\| \\ &\leq d \left(1 + d' |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}\right). \end{aligned}$$

Or ( $t \geq 0$  et  $t^2 \leq 1 + |\epsilon|^{-1/2}t$ ) implique  $t \in [0; t(\epsilon)]$  où

$$t(\epsilon) = \left(|\epsilon|^{-1/2} + |1/\epsilon + 4|^{1/2}\right)/2 \leq d'' |\epsilon|^{-1/2}.$$

On obtient donc  $\|F_z(\epsilon)\|^{1/2} \leq c'' |\epsilon|^{-1/2}$ . □

### 2.7.6 Inégalité différentielle.

On reste dans le cadre défini dans le paragraphe 2.7.5 précédent.

**Proposition 2.15.** *Dans les conditions précédentes, l'application  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni \epsilon \mapsto G_z(\epsilon) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  est dérivable de dérivée*

$$(dG_z/d\epsilon)(\epsilon) = G_z(\epsilon) iB^* B G_z(\epsilon). \quad (2.22)$$

**Preuve :** Par la formule des résolvantes,

$$G_z(\epsilon) - G_z(\epsilon') = (\epsilon - \epsilon') G_z(\epsilon) iB^*B G_z(\epsilon'). \quad (2.23)$$

Par la proposition 2.9,  $\|G_z(\epsilon)\|$  est uniformément borné en  $\epsilon$ . La formule (2.23) donne la continuité de  $\epsilon \mapsto G_z(\epsilon)$ . En divisant par  $\epsilon - \epsilon' \neq 0$  dans cette formule, on voit que cette fonction est en fait dérivable de dérivée donnée par (2.22).  $\square$

**Proposition 2.16.** *Dans les conditions précédentes, avec le  $\epsilon_0$  introduit dans la proposition 2.14, il existe  $c > 0$  tels que, pour tout  $|\epsilon| \in ]0; \epsilon_0]$ ,*

$$\|(dF_z/d\epsilon)(\epsilon)\| \leq c \left(1 + |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}\right). \quad (2.24)$$

**Preuve :** Par (2.22),

$$(dF_z/d\epsilon)(\epsilon) = \langle A \rangle^{-1} G_z(\epsilon) iB^*B G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1}$$

et on écrit, comme opérateur agissant sur  $\mathcal{D}(H)$ ,

$$\begin{aligned} [H, iA]^0 &= B^*B + (1 - \chi)(H) [H, iA]^0 (1 - \chi)(H) \\ &\quad + \chi(H) [H, iA]^0 (1 - \chi)(H) + (1 - \chi)(H) [H, iA]^0 \chi(H). \end{aligned}$$

En insérant  $(H + iI)^{-1}(H + iI)$ , en utilisant le fait que  $[H, iA]^0(H + iI)^{-1}$  est borné et en utilisant la proposition 2.14,

$$\begin{aligned} &\left\| \langle A \rangle^{-1} G_z(\epsilon) (1 - \chi)(H) [H, iA]^0 \chi(H) G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1} \right\| \\ &\leq c \left(1 + |\epsilon|^{1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}\right) |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2} \end{aligned}$$

On a la même estimation pour

$$\left\| \langle A \rangle^{-1} G_z(\epsilon) \chi(H) [H, iA]^0 (1 - \chi)(H) G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1} \right\|$$

et par les mêmes arguments, on obtient

$$\begin{aligned} &\left\| \langle A \rangle^{-1} G_z(\epsilon) (1 - \chi)(H) [H, iA]^0 (1 - \chi)(H) G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1} \right\| \\ &\leq c \left(1 + |\epsilon|^{1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}\right)^2. \end{aligned}$$

On pose

$$F_z^0(\epsilon) = \langle A \rangle^{-1} G_z(\epsilon) [H, iA]^0 G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1}.$$

Comme  $G_z(\epsilon)$  envoie  $\mathcal{D}(A)$  dans  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$  (cf. proposition 2.12), on a, pour tout  $(\phi, \psi) \in \mathcal{H}^2$ ,

$$\begin{aligned} \langle \phi, F_z^0(\epsilon)\psi \rangle &= \left\langle G_z(\epsilon)^* \langle A \rangle^{-1} \phi, [H - zI - i\epsilon B^*B, A] G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1} \psi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle G_z(\epsilon)^* \langle A \rangle^{-1} \phi, i\epsilon [B^*B, A] G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1} \psi \right\rangle \\ &= \left\langle \langle A \rangle^{-1} \phi, [G_z(\epsilon), A] \langle A \rangle^{-1} \psi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle G_z(\epsilon)^* \langle A \rangle^{-1} \phi, i\epsilon [B^*B, A] G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1} \psi \right\rangle. \end{aligned}$$

Notons que, sur  $\mathcal{D}(A)^2$ , la forme  $[G_z(\epsilon), A]$  est représentée par  $G_z(\epsilon)A - AG_z(\epsilon)$ . Comme  $[B^*B, A]$  est bornée de  $\mathcal{D}(H)$  dans  $\mathcal{D}(H)^*$  (cf. proposition 2.12), on a, en insérant convenablement  $(H + iI)^{-1}(H + iI)$  et  $(1 - \chi)(H) + \chi(H)$ ,

$$\left\| \langle A \rangle^{-1} G_z(\epsilon) i\epsilon[B^*B, A] G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1} \right\|$$

$$\leq c\epsilon \|(H + iI) G_z(\epsilon) \langle A \rangle^{-1}\|^2 \leq c\epsilon \left(1 + |\epsilon|^{1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2} + |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}\right)^2,$$

d'après la proposition 2.14. Enfin, en insérant  $(1 - \chi)(H) + \chi(H)$ ,

$$\left\| \langle A \rangle^{-1} G_z(\epsilon) A \langle A \rangle^{-1} \right\| \leq c \left(1 + |\epsilon|^{1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2} + |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}\right),$$

d'après la proposition 2.14. En regroupant, on obtient,

$$\left\| (dF_z/d\epsilon)(\epsilon) \right\| \leq c' \left(1 + |\epsilon|^{-1/2} \|F_z(\epsilon)\|^{1/2} + \|F_z(\epsilon)\| \right).$$

Or  $\|F_z(\epsilon)\| \leq c_1|\epsilon|^{-1}$  (cf. proposition 2.14), donc  $\|F_z(\epsilon)\| \leq \|F_z(\epsilon)\|^{1/2} \cdot (c_1|\epsilon|^{-1})^{1/2} \leq c_1^{1/2}|\epsilon|^{-1/2} \cdot \|F_z(\epsilon)\|^{1/2}$ . On a donc bien (2.24).  $\square$

### 2.7.7 Conclusion.

Pour terminer la preuve du théorème 2.2, il ne reste plus qu'à appliquer le lemme élémentaire suivant.

**Lemme 2.17.** *Soit  $(B, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et soit  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $f : ]0; \epsilon_0] \longrightarrow B$ , de classe  $C^1$ , telle qu'il existe  $\alpha, \beta \in [0; 1[$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $c_1, c_2 > 0$  tels que, pour tout  $\epsilon \in ]0; \epsilon_0]$*

$$\|f'(\epsilon)\| \leq c_1 \left(1 + \epsilon^{-\alpha} \|f(\epsilon)\|^\beta\right), \quad (2.25)$$

$$\|f(\epsilon)\| \leq c_2 \epsilon^{-\gamma}. \quad (2.26)$$

Alors  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f$  existe et  $f$  est bornée par une constante dépendant de  $c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma$ .

**Preuve :** Si  $\gamma < 0$ ,  $f$  tend vers 0 en 0 et on a le résultat cherché. On peut donc supposer que  $\gamma \geq 0$ . Pour  $0 < \epsilon < \epsilon_1 \leq \epsilon_0$ ,  $f(\epsilon_1) - f(\epsilon) = \int_\epsilon^{\epsilon_1} f'(t) dt$ . Si  $f$  est bornée (par exemple si  $\gamma = 0$ ) ou si  $\beta = 0$ , alors on a, par (2.25),

$$\|f(\epsilon_1) - f(\epsilon)\| \leq c_1 \left(\epsilon_1 - \epsilon + \int_\epsilon^{\epsilon_1} t^{-\alpha} dt\right)$$

avec  $\int_0^{\epsilon_0} t^{-\alpha} dt < \infty$ . La fonction  $f$  vérifie donc un critère de Cauchy en 0 donc  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f$  existe. On peut donc supposer maintenant que  $\gamma > 0$  et que  $\beta \in ]0; 1[$ . Par (2.25),

$$\|f(\epsilon)\| \leq \|f(\epsilon_1)\| + c_1\epsilon_0 + c_1 \int_\epsilon^{\epsilon_1} t^{-\alpha-\beta\gamma} dt. \quad (2.27)$$

Si  $\alpha + \beta\gamma < 1$  alors  $f$  est bornée. Dans le cas contraire, on peut toujours augmenter  $\gamma$  de sorte que  $\alpha + \beta\gamma > 1$ . L'estimation (2.27) donne alors  $\|f(\epsilon)\| \leq c'\epsilon^{1-\alpha-\beta\gamma}$  qui améliore

(2.26) puisque, comme  $\alpha, \beta \in [0; 1[$ ,  $\alpha + \beta\gamma - 1 < \gamma$ . On peut reprendre l'argument précédent en remplaçant  $\gamma$  par  $\alpha + \beta\gamma - 1$ . En répétant la procédure un nombre fini de fois, on obtient que  $f$  est bornée.  $\square$

**Preuve du théorème 2.2 (suite et fin) :** Par les propositions 2.14 et 2.16, on peut appliquer le lemme 2.17 à  $]0; \epsilon_0] \ni \epsilon \mapsto F_z(\epsilon)$ , uniformément par rapport à  $z$  tel que  $\Im z > 0$  et  $\Re z \in ]\lambda' - \delta'/4; \lambda' + \delta'/4[$ , d'une part, et à  $]0; \epsilon_0] \ni \epsilon \mapsto F_z(-\epsilon)$ , uniformément par rapport à  $z$  tel que  $\Im z < 0$  et  $\Re z \in ]\lambda' - \delta'/4; \lambda' + \delta'/4[$ , d'autre part. Cela donne (2.2) sur  $]\lambda' - \delta'/4; \lambda' + \delta'/4[$ .  $\square$

### 3 Problème à $N$ corps.

Cette partie est consacrée à l'étude de la théorie temporelle de la diffusion des opérateurs de Schrödinger à  $N$  corps. On en donnera les principaux résultats. Parmi eux, l'estimation de Mourre, introduite dans la partie 2 précédente, joue un rôle important. Le point culminant, la complétude asymptotique, sera présenté dans le "cas à courte portée" seulement. L'excellent livre [DG] contient tout ce que l'on souhaite présenter ici et le fait de belle manière. C'est pourquoi, ici, on renvoie à certains paragraphes de ce livre, on utilise ses notations et on résume certains de ses principaux résultats. L'objectif poursuivi est de faciliter la lecture de ce texte de référence. Comme il contient bien d'autres aspects de cette théorie, il est fortement recommandé si l'on veut approfondir la présente étude.

#### 3.1 Formulation géométrique.

Dans ce paragraphe, on présente la formulation géométrique des problèmes à  $N$  corps classique et quantique. Ceci étant bien traité dans [DG], on renvoie à la lecture des paragraphes 5.1 et 5.2 de [DG]. On utilisera aussi les notations de [DG] dans les paragraphes suivants.

#### 3.2 Problème à $N$ corps quantique.

Dans ce paragraphe, on donne les principaux résultats concernant les opérateurs de Schrödinger à  $N$  corps. En particulier, on donne l'énoncé de la complétude asymptotique dans le cas à courte portée. Là encore, le sujet est bien traité dans [DG]. On va ici résumer une partie de la partie 6 de [DG]. On utilise les notations de [DG].

On se donne un espace euclidien  $(X, |\cdot|)$  de dimension finie et une famille  $\{X_a, a \in \mathcal{A}\}$  de sous-espaces de  $X$ . L'ensemble  $\mathcal{A}$  est muni d'un ordre partiel  $\leq$  et admet un plus petit ( $a_{min}$ ) et un plus grand ( $a_{max}$ ) élément. De plus,  $X_{a_{min}} = X$ . Soit  $N(\mathcal{A})$  la longueur de la plus longue suite strictement croissante d'éléments de  $\mathcal{A}$ . Pour  $a \in \mathcal{A}$ , on note par  $X^a$

l'orthogonal de  $X_a$ . De plus, pour  $a, b \in \mathcal{A}$ , on a  $(b \leq a) \iff (X^b \subset X^a) \iff (X_a \subset X_b)$ . On peut équiper le dual  $X'$  de  $X$  d'une métrique induite par celle de  $X$ , que l'on note encore par  $|\cdot|$ . Pour  $a \in \mathcal{A}$ , soit  $(X')_a$  le sous-espace de  $X'$  composé des formes  $\xi \in X'$  qui s'annule sur  $X^a$ . Il est isomorphe au dual  $(X_a)'$  de  $X_a$ . On note par  $(X')^a$  son orthogonal dans  $X'$ . Ce dernier est constitué des formes  $\xi \in X'$  qui s'annule sur  $X_a$  et est isomorphe au dual  $(X^a)'$  de  $X^a$ . Pour  $x \in X$ , on note par  $x_a$  (resp.  $x^a$ ) la projection orthogonale de  $x$  sur  $X_a$  (resp.  $X^a$ ). Pour  $\xi \in X'$ , on note par  $\xi_a$  (resp.  $\xi^a$ ) la projection orthogonale de  $\xi$  sur  $(X')_a$  (resp.  $(X')^a$ ). Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  différentiable. Pour  $x \in X$ , la différentielle  $df(x)$  de  $f$  au point  $x$  est un élément de  $X'$ . En utilisant le métrique sur  $X$ , on construit le gradient  $\nabla f(x)$  de  $f$  au point  $x$ . Si  $f(x)$  ne dépend que de  $x_a$  (resp.  $x^a$ ), on peut identifier  $df(x)$  à un élément de  $(X_a)'$  (resp.  $(X^a)'$ ) et noter le gradient correspondant par  $\nabla_a f(x)$  (resp.  $\nabla^a f(x)$ ). On pose  $D := (1/i)\nabla$ ,  $D_a := (1/i)\nabla_a$ ,  $D^a := (1/i)\nabla^a$ ,  $-\Delta = D^2$ ,  $-\Delta_a = D_a^2$  et  $-\Delta^a = (D^a)^2$ .

On introduit maintenant les hamiltoniens à  $N$  corps généralisés. Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , on considère une fonction  $v^a : X^a \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'opérateur

$$v^a (1 - \Delta^a)^{-1} \quad \text{est compact dans} \quad L^2(X^a). \quad (3.28)$$

On suppose que  $v^{a_{min}}$  est nulle. On pose, pour  $a \in \mathcal{A}$  et pour  $x \in X$ ,

$$V(x) := \sum_{b \in \mathcal{A}} v^b(x^b), \quad V^a(x^a) := \sum_{b \in \mathcal{A}, b \leq a} v^b(x^b). \quad (3.29)$$

Comme, pour  $b \leq a$ ,  $X^b \subset X^a$ ,  $V^a$  est bien une fonction de  $x^a$ . Grâce à (3.28),  $V$  (resp.  $V^a$ ) est relativement borné par rapport à  $-\Delta$  (resp.  $-\Delta^a$ ). L'opérateur

$$H := (1/2)D^2 + V(x), \quad (3.30)$$

agissant dans  $L^2(X)$ , est auto-adjoint sur le domaine  $H^2(X)$  du laplacien  $D^2$  et est borné inférieurement. De même, l'opérateur

$$H^a := (1/2)(D^a)^2 + V^a(x^a), \quad (3.31)$$

agissant dans  $L^2(X^a)$ , est auto-adjoint sur le domaine  $H^2(X^a)$  du laplacien  $(D^a)^2$  et est borné inférieurement. En identifiant  $L^2(X)$  à  $L^2(X_a) \otimes L^2(X^a)$ , l'opérateur

$$H_a := (1/2)D_a^2 \otimes 1 + 1 \otimes H^a, \quad (3.32)$$

agissant dans  $L^2(X)$ , est auto-adjoint sur  $H^2(X)$  et est borné inférieurement.

**Définition 3.1.** *Avec les notations précédentes, l'opérateur  $H$ , associé à la famille  $\{X_a; a \in \mathcal{A}\}$  de sous-espaces de  $X$ , est un hamiltonien à plusieurs corps généralisé. Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $H_a$  est l'hamiltonien d'amas associé à  $a$  et  $H^a$  est l'hamiltonien interne d'amas associé à  $a$ . Le potentiel  $I_a(x) = V(x) - V^a(x^a)$  est appelé potentiel inter-amas associé à  $a$ . Chaque  $a \in \mathcal{A}$  est appelé sous-système à plusieurs corps du système à plusieurs corps constitué par  $X$  et  $H$ .*



Le "nombre de corps" de l'hamiltonien  $H$  est donné par  $N(\mathcal{A})$ . Pour  $a \in \mathcal{A}$ ,  $H_a$  est un hamiltonien à plusieurs corps généralisé, associé à la famille  $\{X_b; b \in \mathcal{A}, b \leq a\}$  de sous-espaces de  $X$  et  $H^a$  est un hamiltonien à plusieurs corps généralisé, associé à la famille  $\{X^a \cap X_b; b \in \mathcal{A}, b \leq a\}$  de sous-espaces de  $X^a$ .

Comme  $X^{a_{min}} = \{0\}$ , on pose par convention  $L^2(X^{a_{min}}) = \mathbb{C}$ ,  $V^{a_{min}} = 0$  et  $H^{a_{min}} = 0$ . Comme  $\{b \in \mathcal{A}, b \not\leq a_{max}\} = \emptyset$ , on pose par convention  $I_{a_{max}} = 0$ . Le terme  $(-1/2)\Delta_{a_{max}}$  s'interprète comme l'énergie cinétique du centre de masse du système et n'est pas intéressant du point de vue physique. C'est pourquoi on préfère se concentrer sur le système formé par  $X^{a_{max}}$ ,  $H^{a_{max}}$  et la famille  $\{X^{a_{max}} \cap X_a; a \in \mathcal{A}\}$  de sous-espaces de  $X^{a_{max}}$ . L'hamiltonien  $H^{a_{max}}$  s'appelle l'hamiltonien réduit du système initial. Le plus petit sous-espace de  $X^{a_{max}}$  dans la famille  $\{X^{a_{max}} \cap X_a; a \in \mathcal{A}\}$  est  $X^{a_{max}} \cap X_{a_{max}} = \{0\}$ . C'est pourquoi, il est légitime de supposer que, pour le système à plusieurs corps considéré, associé à la famille  $\{X_a; a \in \mathcal{A}\}$ , on ait  $X_{a_{max}} = \{0\}$ .

On va maintenant énoncé les principaux résultats disponibles sur les systèmes à  $N$  corps généralisés. On va voir qu'on peut se faire une image assez précise des propriétés spectrales de ces systèmes, sous des hypothèses assez générales.

Un rôle particulier va être joué par les seuils que l'on introduit maintenant.

**Définition 3.2.** Soit  $H$  un hamiltonien à plusieurs corps généralisé satisfaisant  $X_{a_{max}} = \{0\}$  et (3.28), pour tout  $a \in \mathcal{A}$ . L'ensemble des seuils d'un sous-système  $a \in \mathcal{A} \setminus \{a_{min}\}$  est donné par

$$\mathcal{T}^a := \bigcup_{\substack{b \in \mathcal{A} \\ b < a}} \sigma_{pp}(H^b) \quad (3.33)$$

et on pose  $\Sigma^a := \inf \mathcal{T}^a$ . On note  $\mathcal{T}^{a_{max}}$  et  $\Sigma^{a_{max}}$  par  $\mathcal{T}$  et  $\Sigma$  respectivement.

Comme  $\sigma_{pp}(H^{a_{min}}) = \{0\}$ , on a  $\Sigma^a \leq 0$ , pour tout  $a \in \mathcal{A} \setminus \{a_{min}\}$ . Le premier résultat fondamental est le théorème "HVZ" suivant. Les trois lettres renvoient à Hunziker-Van Winter-Zhislin.

**Théorème 3.3.** Soit  $H$  un hamiltonien à plusieurs corps généralisé satisfaisant  $X_{a_{max}} = \{0\}$  et (3.28), pour tout  $a \in \mathcal{A}$ . Le spectre essentiel de  $H$  est donné par  $\sigma_{ess}(H) = [\Sigma; +\infty[$ .

Le second résultat fondamental est l'estimation de Mourre. En plus de  $X_{a_{max}} = \{0\}$  et (3.28), on va supposer, pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,

$$(1 - \Delta^a)^{-1} (x^a \cdot \nabla^a v^a(x^a)) (1 - \Delta^a)^{-1} \text{ est compact dans } L^2(X^a). \quad (3.34)$$

On note par  $\cdot$  le produit scalaire de  $X$ . On introduit le générateur des dilatations  $A := (1/2)(x \cdot D + D \cdot x)$ , qui est auto-adjoint dans  $L^2(X)$ . Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , on a la décomposition  $A = A_a \otimes 1 + 1 \otimes A^a$ , où  $A_a := (1/2)(x_a \cdot D_a + D_a \cdot x_a)$  et où  $A^a := (1/2)(x^a \cdot D^a + D^a \cdot x^a)$ . Ces opérateurs sont auto-adjoints dans  $L^2(X_a)$  et  $L^2(X^a)$ , respectivement, et sont les générateurs des dilatations sur  $X_a$  et  $X^a$ , respectivement. Par convention,  $A^{a_{min}} = 0$  agissant dans  $L^2(X^{a_{min}}) = \mathbb{C}$ . Notons que, grâce à (3.28) et (3.34), l'opérateur  $(H + i)^{-1}[H, iA](H + i)^{-1}$  est borné sur  $L^2(X)$ .

On rappelle que, si  $b$  est un borélien de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{1}_b$  désigne sa fonction caractéristique. On

rappelle que,  $\star = pp, c$ ,  $\mathbf{1}^\star(H)$  désigne la projection orthogonale sur le sous-espace  $\mathcal{H}_\star$ . De plus, on note  $\mathbf{1}^\star(H)\mathbf{1}_b(H) = \mathbf{1}_b(H)\mathbf{1}^\star(H)$  par  $\mathbf{1}_b^\star(H)$ .

Enfin, on définit une "distance supérieure" à l'ensemble des seuils en posant, pour  $\lambda \in [\Sigma; +\infty[$ ,

$$d(\lambda) := \inf\{\lambda - \tau; \tau \leq \lambda, \tau \in \mathcal{T}\}. \quad (3.35)$$

**Théorème 3.4.** *Soit  $H$  un hamiltonien à plusieurs corps généralisé satisfaisant  $X_{a_{max}} = \{0\}$ , (3.28) et (3.34), pour tout  $a \in \mathcal{A}$ . On a les résultats suivants.*

1. *Pour tout  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  tels que  $[\lambda_1; \lambda_2] \cap \mathcal{T} = \emptyset$ , le rang de  $\mathbb{1}_{[\lambda_1; \lambda_2]}^{pp}(H)$  est fini. En particulier,  $\sigma_{pp}(H)$  ne peut s'accumuler que sur  $\mathcal{T}$ . De plus,  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T} \cup \sigma_{pp}(H)$  sont au plus dénombrables.*
2. *Pour tout  $\epsilon > 0$  et  $\lambda \in [\Sigma; +\infty[$ , il existe un intervalle borné  $I$  contenant  $\lambda$  et un opérateur compact sur  $L^2(X)$  tels que*

$$\mathbf{1}_I(H) [H, iA] \mathbf{1}_I(H) \geq 2(d(\lambda) - \epsilon)\mathbf{1}_I(H) + K. \quad (3.36)$$

3. *Pour tout  $\epsilon > 0$  et  $\lambda \in [\Sigma; +\infty[$ , il existe un intervalle borné  $I$  contenant  $\lambda$  tel que*

$$\mathbf{1}_I^c(H) [H, iA] \mathbf{1}_I^c(H) \geq 2(d(\lambda) - \epsilon)\mathbf{1}_I^c(H). \quad (3.37)$$

Ce résultat est très important car il va influencer tous les suivants. Tout d'abord, on a un résultat de "décroissance exponentielle" des fonctions propres de  $H$ .

**Théorème 3.5.** *Soit  $H$  un hamiltonien à plusieurs corps généralisé satisfaisant (3.28) et (3.34), pour tout  $a \in \mathcal{A}$ . Soit  $E \in \mathbb{R}$  et  $\psi \in H^2(X)$  tels que  $H\psi = E\psi$ . Soit*

$$\tau := \sup\{(1/2)\theta^2 + E; \theta \geq 0, e^{\theta|x|}\psi \in L^2(X)\}.$$

Alors  $\tau \in \mathcal{T} \cup \{+\infty\}$ . De plus,

$$\tau = \sup\{(1/2)\theta^2 + E; \theta \geq 0, e^{\theta|x|}\psi \in H^2(X)\}.$$

Ainsi, si  $\psi$  est un vecteur propre de  $H$  associé à la valeur propre  $E \notin \mathcal{T}$ , alors, d'après le théorème 3.5, il existe  $\theta > 0$  tel que  $e^{\theta|x|}\psi \in L^2(X)$ , ce que l'on interprète comme une "décroissance exponentielle" de  $\psi$ . Une conséquence importante est l'absence de valeur propre strictement positive pour  $H$ .

**Théorème 3.6.** *Soit  $H$  un hamiltonien à plusieurs corps généralisé satisfaisant (3.28) et (3.34), pour tout  $a \in \mathcal{A}$ . On suppose de plus que*

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\| (\lambda - (1/2)\Delta)^{-1/2} (x \cdot \nabla_x V) (\lambda - (1/2)\Delta)^{-1/2} \right\| < 1.$$

Alors  $H$  n'a pas de valeur propre strictement positive.

On s'intéresse maintenant à la théorie de la diffusion pour les systèmes à  $N$  corps. On introduit une autre hypothèse concernant les potentiels  $v^a$ , pour  $a \in \mathcal{A}$ , à savoir

$$\int_0^{+\infty} \left\| (1 - \Delta^a)^{-1} \left( \nabla_{x^a} v^a(x^a) \mathbf{1}_{[1;+\infty[}(|x^a|/R) \right) (1 - \Delta^a)^{-1} \right\| dR < +\infty. \quad (3.38)$$

Sous (3.28) et sous (3.38), il se trouve que (3.34) est satisfaite et le théorème 3.4 s'applique. On note par  $C_\infty$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continues et tendant vers 0 à l'infini. On note par  $n$  la dimension de l'espace euclidien  $X$  et on y choisit une base orthonormée  $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ . On voit l'opérateur de "multiplication par le vecteur  $x$ " agissant dans l'espace  $L^2(X)$  comme le vecteur composé des opérateurs auto-adjoints de multiplication par  $e_j \cdot x$ , qui à toute fonction  $\phi \in \{\psi \in L^2(X); (e_j \cdot x)\psi(x) \in L^2(X)\} =: \mathcal{D}(e_j \cdot x)$  associe la fonction  $x \mapsto (e_j \cdot x)\psi(x)$ . Ces opérateurs commutent deux à deux. Le domaine de l'opérateur de "multiplication par le vecteur  $x$ " est bien sûr l'intersection des domaines  $\mathcal{D}(e_j \cdot x)$ , pour  $1 \leq j \leq n$ . Il se trouve que ni la définition de l'opérateur de "multiplication par le vecteur  $x$ " ni le résultat suivant ne dépend du choix de la base orthonormée  $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$  de  $X$ .

**Théorème 3.7.** *Soit  $H$  un hamiltonien à plusieurs corps généralisé satisfaisant  $X_{a_{max}} = \{0\}$ , (3.28) et (3.38), pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .*

1. *Pour tout  $g \in C_\infty$ , pour tout  $1 \leq j \leq n$ , pour tout  $\phi \in L^2(X)$ , la limite*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{itH} g(e_j \cdot x/t) e^{-itH} \phi =: g(P_j^+) \phi$$

*existe. De plus, ces limites définissent un vecteur  $P^+ = (P_j^+)_{1 \leq j \leq n}$  d'opérateurs auto-adjoints dans  $L^2(X)$  qui commutent deux à deux.*

2. *On a  $\mathbf{1}_{\{0\}}(P^+) = \mathbf{1}_{X_{a_{max}}}(P^+) = \mathbb{P}^{\mathbb{P}}(H^{a_{max}})$ .*

L'opérateur  $P^+$  s'interprète comme la vitesse asymptotique du système quand  $t \rightarrow +\infty$ . Cet opérateur va donner une classification des éléments  $\psi$  de  $L^2(X)$  en fonction du comportement asymptotique, quand  $t \rightarrow +\infty$ , de  $\exp(-itH)\psi$ . Pour ce faire, il est utile de considérer la partition suivante de l'espace des configurations  $X$ .

Pour  $a \in \mathcal{A}$ , on pose

$$Z_a := X_a \setminus \bigcup_{\substack{b \in \mathcal{A} \\ b \not\leq a}} X_b \quad (3.39)$$

avec la convention  $Z_{a_{max}} = X_{a_{max}}$ . Il se trouve que la famille  $\{Z_a, a \in \mathcal{A}\}$  forme une partition de  $X$ . Donc  $1 = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{Z_a}(P^+)$  et, d'après le théorème 3.7,  $\mathbf{1}_{Z_{a_{max}}}(P^+) = \mathbf{1}_{X_{a_{max}}}(P^+) = \mathbf{1}_{\{0\}}(P^+) = \mathbb{P}^{\mathbb{P}}(H^{a_{max}})$ . Donc les vecteurs propres de  $H^{a_{max}}$  correspondent aux éléments de  $L^2(X)$  dont la vitesse asymptotique est nulle. On va maintenant s'intéresser aux autres éléments de  $L^2(X)$  et montrer la "complétude asymptotique" lorsque les interactions sont à "courte portée".

On introduit une condition plus forte que (3.38) : pour  $a \in \mathcal{A}$ ,

$$\int_0^{+\infty} \left\| (1 - \Delta^a)^{-1} v^a(x^a) \mathbf{1}_{[1;+\infty[}(|x^a|/R) (1 - \Delta^a)^{-1/2} \right\| dR < +\infty. \quad (3.40)$$

On a alors le résultat fondamental suivant.

**Théorème 3.8.** Soit  $H$  un hamiltonien à plusieurs corps généralisé satisfaisant  $X_{a_{max}} = \{0\}$ , (3.28) et (3.40), pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .

1. Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , pour tout  $\phi \in L^2(X)$ , les limites

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{itH} e^{-itH_a} \mathbb{1}^{pp}(H^a) \phi =: \Omega_a^+ \phi \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{itH_a} e^{-itH} \mathbb{1}_{Z_a}(P^+) \phi$$

existent. De plus, la seconde est égale à  $(\Omega_a^+)^* \phi$ .

2. L'opérateur  $\Omega_a^+$  est une isométrie partielle telle que  $(\Omega_a^+)^* \Omega_a^+ = \mathbb{1}^{pp}(H^a)$ ,  $\Omega_a^+ (\Omega_a^+)^* = \mathbb{1}_{Z_a}(P^+)$ ,  $\Omega_a^+ H_a = H \Omega_a^+$  et  $\Omega_a^+ D_a = P_a^+ \Omega_a^+ = P^+ \Omega_a^+$ .

Comme  $1 = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{1}_{Z_a}(P^+)$ , le théorème 3.8 implique  $L^2(X) = \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \text{Im} \Omega_a^+$ . Comme  $\Omega_{a_{max}}^+ = \mathbb{1}^{pp}(H^{a_{max}})$ , on a aussi  $\text{Im} \mathbb{1}^c(H^{a_{max}}) = \bigoplus_{a \in \mathcal{A}, a \neq a_{max}} \text{Im} \Omega_a^+$ . C'est cette égalité qu'on appelle la complétude asymptotique. Les opérateurs  $\Omega_a^+$  sont appelés opérateurs d'onde de canal.

## Références

- [ABG] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, I.V. Georgescu : *C<sub>0</sub>-groups, commutator methods and spectral theory of N-body hamiltonians.*, Birkhäuser 1996.
- [CFKS] H. L. Cycon, R. Froese, W. Kirsch, B. Simon : *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry.* Springer-Verlag 1987.
- [DG] J.Derezinski, C.Gérard : *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems.* Springer-Verlag 1997.
- [GG] V.Georgescu, C.Gérard : *On the virial theorem in quantum mechanics.* Comm. Math. Phys. 208, 2, p. 275-281 (1999).
- [GM] C. Gérard, A. Martinez : *Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée.* C.R. Acad. Sci. 306, 121-123, 1988.
- [FH1] R. Froese, I. Herbst : *A new proof of the Mourre estimate.* Duke Math. J. 49, 1075-1085 (1982).
- [FH2] R. Froese, I. Herbst : *Exponential bounds and absence of positive eigenvalues for N-body Schrödinger operators.* Comm. Math. Phys. 87, 3, p. 429-447 (1982/1983).
- [H] L.Hörmander : *The analysis of linear partial differential operators III.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983.
- [J1] Th. Jecko : *Semiclassical resolvent estimates for Schrödinger matrix operators with eigenvalues crossing.*, Math. Nachr. 257, 36-54 (2003).
- [J2] Th. Jecko : *Non-trapping condition for semiclassical Schrödinger operators with matrix-valued potentials.* Prépublication 2004.
- [JMP] A.Jensen, E.Mourre, P.Perry : *Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory.* Ann. IHP 41, 207-225, 1984.
- [K] T.Kato : *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag 1995.

- [Mo] E.Mourre : Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators, Commun. in Math. Phys. 78, 391-408, 1981.
- [PSS] P.Perry, B.Simon, I.Sigal : *Spectral analysis of N-body Schrödinger operators*. Ann. of Math. 114, 519-567, 1981.
- [RS1] M.Reed, B.Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics, Tome I : Fourier Analysis, Self-adjointness*. Academic Press 1979.
- [RS2] M.Reed, B.Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics, Tome II : Functional Analysis*. Academic Press 1979.
- [RS3] M.Reed, B.Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics, Tome III : Scattering theory*. Academic Press 1979.
- [RS4] M.Reed, B.Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics, Tome IV : Analysis of operators*. Academic Press 1979.
- [Ro] D.Robert : *Autour de l'approximation semi-classique*. Birkhäuser 1987.
- [SS] I.M.Sigal, A.Soffer : *The N-particle scattering problem : asymptotic completeness for short range systems*. Ann. of Math. 126 (1987), 35-108.
- [T] B.Thaller : *The Dirac equation*. Springer-Verlag 1992.
- [W] X.P. Wang : *Semiclassical resolvent estimates for N-body Schrödinger operators*. J. Funct. Anal. 97, 466-483 (1991).
- [Y] D.R.Yafaev : *Mathematical Scattering theory. General Theory*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.