EISTI ING 2, 2015-2016.
Analyse Fonctionnelle et distributions, cours de Th. Jecko.

Exercice 1. : Soit $\mathcal{W} = \{]a;b[;(a;b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $\mathcal{W}$ vérifie les hypothèses de la proposition 1.1.12 du cours. la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$ sur $\mathbb{R}$ est la topologie engendrée par la famille $\mathcal{W}$.

Exercice 2. : On considère $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Vérifier l'équivalence suivante : f est continue en a (au sens défini dans le cours) si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \delta > 0\,; \forall x \in \mathbb{R}\,, \big(|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon\big)\,.$$

Exercice 3. :
Soit $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus U \text{ est fini}\}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{T}$ définit une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. Caractériser les ensembles fermés pour cette topologie.
3. Cette topologie est-elle séparée ?
4. Dans l'espace topologique $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, les ensembles $A =]1{,}2[$, $B =]-\infty, 0[$, $C =]-\infty, 0]$, $D = \{2\}$ sont-ils ouverts, fermés, non ouverts ou bien non fermés ?
5. Trouver l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble $A = [0{,}1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie $\mathcal{T}$.
6. Montrer, dans l'espace topologique $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, les propriétés suivantes :
   a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite constante $(x)_n$ admet une seule limite (à savoir x).
   b) Les réels 1 et 2 sont des limites de la suite $(n)_n$.
7. Soit $\mathcal{T}_u$ la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'application $f : (\mathbb{R},\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ est-elle continue ? ouverte ? homéomorphe ? Pourquoi ?
8. Soit $g : (\mathbb{R},\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ une application continue. Montrer que pour tout fermé F de $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$, on a $g^{-1}(F) = \mathbb{R}$ ou bien l'ensemble $g^{-1}(F)$ est fini.
9. En déduire que toute application continue $g : (\mathbb{R},\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ est constante.

Exercice 4. : *Topologie s.c.i.*
Soit $\mathcal{T}_{s.c.i} = \{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_{s.c.i}$ définit une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. L'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{s.c.i})$ est-il séparé ?

3. Dans l'espace topologique $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{s.c.i})$, les ensembles $A =]1,2[$, $B =]-\infty, 0[$, $C =]-\infty, 0]$, $D = [2,3]$ sont-ils ouverts, fermés, non ouverts ou bien non fermés ?
4. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$x_n = n \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{1}{n}\,,$$
convergent-t-elles dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{s.c.i})$? Si oui, peut-on déterminer leur limite ?
5. Soit $\mathcal{T}_u$ la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'application $f : (\mathbb{R},\mathcal{T}_{s.c.i}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ est-elle continue ?
6. On dit que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si l'application $g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{s.c.i})$ est continue. On rappelle que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si l'application $g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ est continue. Montrer que toute fonction continue est s.c.i.
7. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est s.c.i.
   b) pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \ g(x) \leq c\}$ est fermé dans $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$.
   c) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ tel que
$$g(V) \ \subset\ ]g(x) - \varepsilon, +\infty[.$$
8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g_a(x) \ = \ \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1\ , \\ a & \text{si } x = 1\ , \\ 2 & \text{si } x > 1\ . \end{cases}$$
Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ si la fonction g_a est s.c.i.
9. Soit $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in I$, une famille quelconque de fonctions s.c.i. et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) \ = \ \sup_{i\in I} f_i(x)\,.$$
Montrer que f est s.c.i.
10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel ou nul et par $f(x) = -1/q$ si $x = p/q$ avec (p, q) couple irreductible d'entiers et $q > 0$. Montrer que f est s.c.i.

Exercice 5. : Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E et $p \in \mathbb{N}$, on note
$$X_p \ = \ \{x_n; n \geq p\}\,.$$

1. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$ tels qu'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ converge vers ℓ. Montrer que $\ell \in \overline{X}_0$.
2. Trouver une suite réelle $(x_n)_n$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\ell \in \overline{X}_0$ mais ℓ n'est limite d'aucune sous-suite de $(x_n)_n$.
3. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E \setminus X_0$ tels qu'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ converge vers ℓ. Montrer que ℓ est un point d'accumulation de X_0.
4. Trouver une suite réelle $(x_n)_n$ et $\ell \in X_0$ tels que $\ell = \lim x_n$ n'est pas point d'accumulation de X_0.
5. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$ tels qu'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ converge vers ℓ. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\ell \in \overline{X}_p$.
6. On suppose que E est un **espace métrique**. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E et $\ell \in \cap_{p\in\mathbb{N}}\overline{X}_p$. Montrer que ℓ est la limite d'une sous-suite de $(x_n)_n$.

Exercice 6. : *Topologie quotient.*
Soit $X = [0; 1]$ et $Y = \mathbb{R}$ avec leur topologie standard. Sur les deux espaces, on définit la même relation d'équivalence $\mathcal{R}$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x-y \in \mathbb{Z}$. On note $\tilde{X} = X/\mathcal{R}$ et $\tilde{Y} = Y/\mathcal{R}$ les espaces quotients.

a) Déterminer les classes d'équivalences de $0 \in X$, $1/2 \in X$, $0 \in Y$, $1/2 \in Y$.
b) Montrer que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont homéomorphes.
c) Montrer que l'application canonique $\pi_X : X \to \tilde{X}$ n'est pas ouverte.
d) Montrer que l'application canonique $\pi_Y : Y \to \tilde{Y}$ est ouverte.

Exercice 7. : *Topologie produit.*
Soit $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Soit $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ définies par $p_1(x_1; x_2) = x_1$ et $p_2(x_1; x_2) = x_2$. Soit U_1 un ouvert de X_1 et U_2 un ouvert de X_2. Vérifier que

$$U_1 \times U_2 \;=\; p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)\,.$$

Montrer que p_1 et p_2 sont continues pour la topologie produit sur $X_1 \times X_2$.

Exercice 8. : Faire l'exercice 1.2.4 du cours et vérifier les affirmations de l'exemple 1.2.5 du cours.

Exercice 9. : *Application lipschitzienne.*
Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$. Étant donné $k \in \mathbb{R}^+$, on dit que f est k-lipschitzienne si

$$\forall (x; y) \in X^2\,,\; d\big(f(x); f(y)\big) \;\leq\; k \cdot d(x; y)\,.$$

On dit que f est lipschitzienne si elle est k-lipschitzienne pour un certain $k \geq 0$.

1. Montrer qu'une lipschitzienne application $f : X \to X$ est continue.
2. Montrer que les applications 0-lipschitzienne sont les applications constantes.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que sa dérivée g' est bornée. Montrer que f est $\|g'\|_\infty$-lipschitzienne.
4. Soit $k \geq 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Montrer que g est uniformément continue.

Exercice 10. : Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ vérifiant

$$\forall x, y \in X \, ; \; x \neq y \, , \, d(f(x),f(y)) \; < \; d(x,y) \, .$$

1. Montrer que f a au plus un point fixe.
2. Montrer que f est 1-lipschitzienne. En déduire qu'elle est continue.
3. Soit $X_0 = X$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \; = \; f^n(X) \; = \; f \circ f \circ \cdots \circ f(X) \quad (n$ fois). Montrer que X_n est compact, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Vérifier que la suite $(X_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion.
5. Montrer que $Y \; = \; \cap_{n=0}^{\infty} X_n$ est non vide.
6. Rappelons que $diam(Y) \; = \; \sup_{x,y \in Y} d(x,y)$. Montrer que $\exists x,y \in Y$ tels que $diam(Y) \; = \; d(x,y)$.
7. Montrer que $f(Y) = Y$. En déduire que $diam(Y) = 0$ (indication : par l'absurde).
8. Montrer que Y a exactement un élément. En déduire qu'il existe un unique point $p \in X$ tel que $f(p) = p$.

Exercice 11. : *Ensemble triadique de Cantor.*
Soit K le sous-ensemble de $[0; 1]$ constitué des nombres dont le développement en base 3 ne contient pas de coefficient égal à 1.
Rappel : tout nombre x compris entre 0 et 1 s'écrit

$$x \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 3^{-n} \tag{1}$$

où $(c_n)_n$ est une suite à valeur dans $\{0; 1; 2\}$. (Pour les nombres du type $k/3^m$ avec $k,m \in \mathbb{N}$, il y a deux écritures de ce type et pour les autres nombres, une seule). Les c_n sont les coefficients du développement (1) de x en base 3.

1. Montrer que l'ensemble $[0; 1] \setminus K$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Décrire ces intervalles et montrer que la somme infinie de leurs longueurs converge vers 1. (Considérer les intervalles $I_{1;1} =]3^{-1}; 2 \cdot 3^{-1}[$, $I_{2;1} =]3^{-2}; 2 \cdot 3^{-2}[$, $I_{2;2} =]7 \cdot 3^{-2}; 8 \cdot 3^{-2}[$, etc ...)
2. Montrer que K ne contient aucun intervalle ouvert non vide.
3. Montrer qu'aucun point de K n'est isolé.

4. Montrer que K est fermé.
5. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ qui à x donné par (1) associe

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 2^{-n-1} \, .$$

Vérifier que f est bien définie. Montrer que f est continue et surjective sur $[0;1]$. En déduire que K et $[0;1]$ sont en bijection.

Exercice 12. : Vérifier que la suite donnée dans l'exemple 2.3.9 du cours n'admet pas de sous-suite convergente.

Exercice 13. : Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que E est compact si et seulement si, de toute famille de fermés de E dont l'intersection est vide, on peut en extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.

Exercice 14. : Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note

$$X_p \ = \ \{x_n ; n \geq p\} \, .$$

Montrer que

$$\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{X}_p \ \neq \ \emptyset \, .$$

Exercice 15. : Soit $I = [0;1]$ et $X = I^I$ l'ensemble des fonctions de I dans I. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n \in X$ qui, à $x \in I$, associe la n-ième décimale de son développent décimal.

1. Montrer que, pour tout $i \in I$, l'application $p_i : X \to I$ définie par $p_i(f) = f(i)$ est continue pour la topologie produit.
2. Soit $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit x l'élément de $[0;1]$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la $\varphi(2k)$-ième décimale est 0 et la $\varphi(2k+1)$-ième décimale est 1, les autres décimales étant 0. Vérifier que la suite réelle $(f_{\varphi(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans I. En déduire que $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans X pour la topologie produit.
3. Montrer que X est compact pour la topologie produit.

D'après l'exercice 14, il existe une fonction $g : I \to I$ qui appartient à

$$\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{f_n ; n \geq p\}} \, .$$

Cette fonction g ne peut être la limite d'une sous-suite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Résultat à comparer avec les points 5 et 6 de l'exercice 5.

Exercice 16. : Montrer la proposition 2.4.2 du cours.

Exercice 17. : Soit $E = l^2$ l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty$$

1. Montrer que $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2}$ définit une norme sur E.
2. Énoncer la définition d'une suite de Cauchy de E.
3. Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E : $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$.
   – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
   – En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite x_n lorsque $k \to \infty$. On pose $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   – Vérifier que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x^{(k)}\|_2 < \infty$ et en déduire que $x \in E$.
   – Montrer que $\|x^{(k)} - x\|_2 \to 0$ quand $k \to \infty$.
4. En déduire que E muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach (c'est-à-dire complet).

Exercice 18. : *Espace l^∞.*
Soit $E = l^\infty$, l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\,.$$

1. Montrer que $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ définit une norme sur E.
2. Énoncer la définition d'une suite de Cauchy de E.
3. Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E : $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$.
   – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   – En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite x_n, lorsque $k \to \infty$. On pose $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   – Vérifier que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x^{(k)}\|_\infty < \infty$ et en déduire que $x \in E$.
   – Montrer que $\|x^{(k)} - x\|_\infty \to 0$ quand $k \to \infty$.
4. En déduire que E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach (i.e. complet).
5. Montrer que
$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n| \cdot 2^{-n}$$
définit une distance sur E.
6. Montrer que, si une suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers x dans (E,d) alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x_n dans $\mathbb{R}$. En utilisant la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; x_n^k \;=\; \frac{2^n}{k+1}\mathbb{1}_{[0;k]}(n)\,.$$
montrer que la réciproque est fausse.

7. Montrer que, si $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (pour $\|\cdot\|_\infty$) d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x^k_n)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x_n, alors $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans (E, d).
8. Soit $B = B(0; 1]$ la boule unité fermée de E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que B n'est pas compacte pour la topologie définie par $\|\cdot\|_\infty$.
9. Montrer que B est compacte dans l'espace métrique (E, d). (On pourra voir l'ensemble E comme une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit et utiliser le théorème de Tychonov).

Exercice 19. : Soit E l'espace des suites réelles $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ telles que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{|x_n|}{n} < +\infty\,.$$

1. Montrer que $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{|x_n|}{n}$ définit une norme sur E.
2. Énoncer la définition d'une suite de Cauchy de E.
3. Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E :

$$x^{(k)} = (x^{(k)}_1, \ldots, x^{(k)}_n, \ldots) \in E \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}.$$

   - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite réelle $(x^{(k)}_n)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
   - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite réelle $(x^{(k)}_n)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite lorsque $k \to \infty$. On note cette limite $x_n = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}_n$ et on pose $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Vérifier que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x^{(k)}\| < \infty$ et en déduire que $x \in E$.
   - Montrer que $\|x^{(k)} - x\| \to 0$ quand $k \to \infty$.
4. En déduire que E muni de la norme $\|x\|$ est un espace de Banach.

Exercice 20. : *$C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est complet.*
Soit $E = C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|f\| \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\,, \text{pour } f \in E\,.$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
2. Énoncer la définition d'une suite de Cauchy de E.
3. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E.
   - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite réelle $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   - En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite réelle $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite notée $f(x)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$.
   - Vérifier que $f \in E$.

– Montrer que $\|f_k - f\| \to 0$ quand $k \to \infty$.

4. Soit $F = C_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Exercice 21. : Soit (X,d) un espace métrique. On suppose que, pour tout $x \in X$, la boule fermée $B(x:1]$ du centre $x \in X$ et de rayon 1 est compacte (on suppose donc que X est localement compact).

1. Énoncer la définition d'une suite de Cauchy.
2. Vérifier que, pour toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ d'éléments de X, il existe $x \in X$ tel que la boule $B(x;1]$ contient tous les termes de la suite $(x_n)_n$ sauf un nombre fini.
3. En déduire que X est complet.

Exercice 22. :

1. Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas X complet. (Indication : donner un contre-exemple avec $X \subset \mathbb{R}$).
2. Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas $f : X \to X$ contractante (même avec l'inégalité $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ pour tous $x \neq y$, $x,y \in X$). Donner un exemple où f n'a pas de point fixe et un autre exemple où f a au moins deux points fixes.

Exercice 23. : *Version faible du théorème de Picard.*
Soient (X,d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ une application (qu'on ne suppose pas continue). On considère la suite d'applications $f^{\circ n} : X \to X$ définie par $f^{\circ 0} = \mathrm{id}_X$ et $f^{\circ n} = f \circ f^{\circ(n-1)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'application $f^{(N)} : X \to X$ soit contractante. On note x_0 le point fixe de $f^{(N)}$. Montrer que $f(x_0)$ est aussi un point fixe de $f^{(N)}$. En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

Exercice 24. : On cherche une fonction $u \in C^1([0;\pi/2];\mathbb{R})$ vérifiant

$$u(0) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \big[0;\pi/2\big]\,,\; 8(1+u(x)^2)\frac{du}{dx}(x) \;=\; u(x)\sin(x) \,+\, \cos(x)\,. \tag{2}$$

Soit B l'espace de Banach réel $C^0([0;\pi/2];\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0;\pi/2]$ muni de la norme

$$\|v\|_\infty = \sup_{x\in[0;\pi/2]} |v(x)|\,,\ \text{pour}\, v \in B\,.$$

Soit $T : B \to B$ définie par, pour $v \in B$,

$$\forall x \in \big[0;\pi/2\big]\,,\; (Tv)(x) \;=\; \frac{1}{8}\int_0^x \frac{v(t)\sin(t) \,+\, \cos(t)}{1 \,+\, v(t)^2}\,dt\,. \tag{3}$$

1. Montrer que T est bien à valeurs dans B.
2. Soit $v, w \in B$.
   a. Montrer que, pour tout $x \in [0; \pi/2]$, $8\big((Tv)(x) - (Tw)(x)\big) = f_1(x) + f_2(x)$ où

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{(v(t) - w(t))\sin(t)}{1 + v(t)^2}\, dt\,, \tag{4}$$

$$f_2(x) = \int_0^x \Big(\frac{1}{1+v(t)^2} - \frac{1}{1+w(t)^2}\Big)\big(w(t)\sin(t) + \cos(t)\big)\, dt \tag{5}$$

   b. Montrer que, pour tout $x \in [0; \pi/2]$, $|f_1(x)| \leq \|v - w\|_\infty \cdot \pi/2$.
   c. Montrer que, pour tout $x \in [0; \pi/2]$,

$$|f_2(x)| \leq \|v - w\|_\infty \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\big(|v(t)| + |w(t)|\big)\big(|w(t)| + 1\big)}{\big(1 + v(t)^2\big)\big(1 + w(t)^2\big)}\, dt\,. \tag{6}$$

   d. En utilisant $2t \leq 1 + t^2$, pour t réel, vérifier que, pour tous x, y réels positifs,

$$0 \leq \frac{(x+y)(y+1)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{9}{4}\,. \tag{7}$$

   e. En déduire que, pour tout $x \in [0; \pi/2]$,

$$\big|(Tv)(x) - (Tw)(x)\big| \leq \frac{13}{32} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \|v - w\|_\infty\,. \tag{8}$$

3. En déduire que T est contractante.
4. Montrer qu'il existe $v \in B$ telle que $Tv = v$.
5. En déduire qu'il existe une fonction $u \in C^1([0; \pi/2]; \mathbb{R})$ vérifiant (2).

Exercice 25. : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$. On considère une fonction continue $\phi : [a; b] \to \mathbb{R}$ et une fonction continue $K : [a; b] \times [a; b] \to \mathbb{R}$. On suppose que $(b - a)\|K\|_\infty < 1$.

1. (*Équation intégrale de Fredholm*). Montrer qu'il existe une unique application continue $x : [a; b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [a; b]\,, \quad x(t) = \phi(t) + \int_a^b K(s,t)x(s)\, ds\,.$$

2. (*Équation intégrale de Volterra*). Montrer qu'il existe une unique application continue $x : [a; b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [a; b]\,, \quad x(t) = \phi(t) + \int_a^t K(s,t)x(s)\, ds\,.$$

Exercice 26. : Soit (X, d) un espace métrique complet. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction $f_n : X \to X$ telle qu'il existe $\theta_n \in [0; 1[$ tel que f_n soit θ_n-contractante. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : X \to X$.

1. Vérifier que la fonction $f : X \to X$ est continue.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : X \to X$ admet un unique point fixe $a_n \in X$.
3. Vérifier que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X,
$$\lim_{n\to\infty} d(f_n(x_n), f(x_n)) \ \to \ 0\,.$$
En déduire que $d(a_n, f(a_n)) \to 0$, quand $n \to \infty$.
4. Montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite a^* alors a^* est un point fixe pour f.
5. En déduire que si X est compact alors f admet au moins un point fixe.
6. Montrer que si la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite a^* alors a^* est un point fixe pour f.
7. En déduire que si $f(X)$ est compact alors $f : X \to X$ admet au moins un point fixe.
8. On suppose maintenant que $f : X \to X$ est θ-contractante avec $0 < \theta < 1$ et on note a^* son point fixe. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$d(a_n, a^*) \leq d(a_n, f(a_n)) + \theta d(a_n, a^*)\,.$$
En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a^*.

Exercice 27. : *Lemme de Riesz.*
Soit E un espace vectoriel normé et soit M un sous-espace strict et fermé de E. Montrer que
$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists u \in E\,,\ \|u\| = 1 \text{ et } dist(u, M) \geq 1 - \epsilon$$
(Indication : Considérer un point $u_0 \in E \setminus M$ et un point $v_0 \in M$ tels que $(1-\epsilon)\|u_0 - v_0\| < dist(u_0, M)$, puis choisir $u = \|u_0 - v_0\|^{-1}(u_0 - v_0)$).

Exercice 28. : *Théoréme de Riesz.*
Montrer par l'absurde le résultat suivant : Soit E un espace vectoriel normé dont la boule unité fermée $B_E = B(0; 1]$ est compacte. Alors E est de dimension finie.
(Indication : On pourra utiliser le lemme de Riesz de l'exercice 27 pour construire une suite d'éléments de B_E qui n'a pas de sous-suite convergente).

Exercice 29. : Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $e^{(k)}$ l'élément de ℓ^∞ donné par $e^{(k)}_n = \delta_{nk}$ (symbole de Kronecker). Soit $F = \mathrm{vect}(e^{(0)})$ et $G = \mathrm{vect}(e^{(0)})_{k\in\mathbb{N}^*}$. On considère les applications linéaires suivantes $S, T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ définie par
$$S \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ = \ (0; x_0; x_1; x_2; \cdots) \text{ et } T \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ = \ (x_1; x_2; \cdots)\,.$$

1. Montrer que S et T sont continues. Calculer leur norme.
2. Déterminer l'image et le noyau de S et de T.
3. S est-elle injective ? surjective ? T est-elle injective ? surjective ?
4. Calculer $S \circ T$ et $T \circ S$.
5. Montrer que la restriction de T à l'image de S est un homéomorphisme de l'image de S. Déterminer son inverse.

Exercice 30. :

Soit E l'espace de Banach réel $C^0([0;1];\mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|\,.$$

Soit $K : [0;1]\times[0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T l'opérateur linéaire sur E défini par, pour $f \in E$,

$$\forall x \in [0;1]\,, \quad (Tf)(x) \;=\; \int_0^1 K(x;y)f(y)\,dy\,.$$

1. Montrer que T est continu sur E et que sa norme vérifie
$$\|T\| \;\leq\; \sup_{x\in[0;1]} \int_0^1 |K(x;y)|\,dy\,. \tag{9}$$
2. On suppose que K est positive. Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité (9). (Indication : on pourra appliquer T à la fonction constante égale à 1).
3. Justifier que la fonction
$$[0;1] \ni x \mapsto \int_0^1 |K(x;y)|\,dy$$
atteint sa borne supérieure en un point $x_0 \in [0;1]$.
4. On suppose que K est non nulle. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E définie par $f_n(y) = K(x_0;y)(|K(x_0;y)| + 1/n)^{-1}$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty \neq 0$ et $\|f_n\|_\infty \to 1$, quand $n \to \infty$.
5. En déduire qu'il y a égalité dans l'inégalité (9).

Exercice 31. : Soit $E = C^0([0;1];\mathbb{R})$ l'espace de Banach réel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|\,.$$

Soit F est le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions de classe C^1 sur $[0;1]$. F est aussi un espace vectoriel normé pour $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire $\varphi : F \to E$ qui, à toute fonction $f \in F$, associe sa dérivée f'.

1. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions C^1 définies sur $[0;1]$ par $g_n(t) = (n^2(t-1/2)^2 - 1/4)^2$ si $1/2 - 1/(2n) \leq t \leq 1/2 + 1/(2n)$ et $g_n(t) = 0$ sinon. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\| = g_n(1/2) = 1/16$ et $\|g_n'\|_\infty \geq |g_n'(1/2 + 1/(4n))| = \frac{3n}{16}$.
2. Montrer que φ n'est pas continue.

Exercice 32. : Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit C le sous-espace des suites convergentes et C_0 celui des suites convergentes vers 0. Soit L l'application linéaire qui, à toute suite de C, associe sa limite.

1. Montrer que L est continue sur C. Quelle est sa norme ?
2. Construire une forme linéaire non nulle $\tilde{L}$ sur ℓ^∞, qui est nulle sur C_0. (Indication : prolonger L).
3. En déduire que C_0 n'est pas dense dans ℓ^∞.
4. Retrouver ce résultat en montrant qu'un certain voisinage de la suite constante égale à 1 ne contient aucune suite de C_0.

Exercice 33. : Soit $1 \leq p < \infty$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a^{(k)} = (1/k^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On rappelle que, pour toute forme linéaire continue L sur $l^p(\mathbb{N}^*)$, il existe une unique suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^q(\mathbb{N}^*)$ telle que

$$\forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^p\,,\ L(a) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\,.$$

a) i) Soit $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^q(\mathbb{N}^*)$. Montrer que la série entière

$$\sum_{n\geq 1} b_n z^n$$

converge absolument sur le disque unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. On note par f sa somme.

ii) On suppose que, pour $k \geq 2$, $f(1/k) = 0$. Montrer que $f = 0$. *Indication :* on admettra que la somme d'une série entière n'admet que des zéros isolés.

b) i) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a^{(k)} \in l^p(\mathbb{N}^*)$. On note par F le sous-espace vectoriel de $l^p(\mathbb{N}^*)$ engendré par les a_k, pour $k \geq 2$.

ii) Montrer que F est dense en norme dans $l^p(\mathbb{N}^*)$.

Exercice 34. : Exemple en dimension infinie de deux ensembles convexes disjoints non séparés au sens large.
Dans l'espace $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N}^*)$, on considère les ensembles

$$A_0 \ = \ \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1;\ \forall n \geq 1\,,\ x_{2n} = 0\}\,,$$

$$B \ = \ \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1;\ \forall n \geq 1\,,\ x_{2n} = 2^{-n} x_{2n-1}\}\,.$$

1. Montrer que A_0 et B sont des s.e.v fermés dans ℓ^1. Montrer qu'ils ne sont pas compacts.
2. Montrer que le sous-ensemble $A_0 + B := \{x + y; x \in A_0, y \in B\}$ de ℓ^1 est dense dans ℓ^1.
3. Soit $c \in \ell^1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{2n-1} = 0$ et $c_{2n} = 2^{-n}$. Montrer que $c \notin A_0 + B$ et que, pour $A := A_0 - c$, $A \cap B$ est vide. Démontrer que A et B ne peuvent être séparés au sens large.
4. Expliquer pourquoi le théorème d'Hahn-Banach (forme géométrique) ne s'applique pas à A et B.

Exercice 35. : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x > 0\,, \ \lim_{n \to +\infty} f(nx) \ = \ 0\,. \tag{10}$$

On veut montrer que $\lim_{y \to +\infty} f(y)$ existe et vaut 0. Pour $\epsilon > 0$ fixé et $p \in \mathbb{N}$, on note $F_p = \{y \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq p, |f(ny)| \leq \epsilon\}$.

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, F_p est fermé.
2. Montrer que $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} F_p \supset \mathbb{R}^{+*}$. (Indication : utiliser (10)).
3. En déduire, par le théorème de Baire, qu'il existe $y_0 > 0$ tel que, pour tout $x \geq y_0$, $|f(x)| \leq \epsilon$.
4. Conclure.

Exercice 36. : Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $F_n = \{f \in E;\ \exists t \in [0;1];\ \forall s \in [0;1]\,, |f(s) - f(t)| \leq n|s - t|\}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est fermé dans E.
2. Montrer que, si f est dérivable en un point $t_0 \in [0;1]$, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in F_n$.
3. Soit $g \in E$ une fonction constante. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in E \setminus F_n$ tel que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$.
4. Même question pour une fonction $g \in E$ affine par morceaux.
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intérieur de F_n est vide. (Indication : montrer que toute fonction continue peut-être approchée uniformément par des fonctions affines par morceaux).
6. Montrer qu'il existe des fonctions continues qui sont nulle part dérivables.

Exercice 37. : Soit E l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'ensemble $\overline{\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}}$ est compact.

1. Montrer que $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|$ est bien une norme sur E.
2. Soit $\phi_n : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_n(f) = nf(n)$. Montrer que $\phi_n \in E'$, le dual (fort) de E, et calculer $\|\phi_n\|_{E'}$.

3. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \phi_n(f)$ pour $f \in E$? Est-ce que $(E, \|.\|_\infty)$ est complet ?

Exercice 38. : Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels dans l^1, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n b_n|$ converge. On note par $\|\cdot\|_1$ la norme usuelle dans l^1.

1. Pour $N \in \mathbb{N}$, soit l_N la forme linéaire sur l^1 définie par : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n b_n$. Montrer que l_N est continue et que $\|l_N\| = \sup_{1\le n\le N} |b_n|$.
2. Montrer que
   (i) l'application $l : \ell^1 \ni (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ est bien définie et est une forme linéaire sur l^1,
   (ii) $\sup_{\|a\|_1\le 1} |l(a)| \le \sup_{1\le n} |b_n| \le \infty$,
   (iii) pour tout $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^1$, $l_N(a) \to l(a)$, quand $N \to \infty$.
3. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^\infty$, que l est continue sur l^1 et que sa norme vérifie $\|l\| = \sup_{1\le n} |b_n|$.

Exercice 39. : Indentification du dual de $\ell^1(\mathbb{N}^*)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $e^{(k)}$ l'élément de $l^1(\mathbb{N}^*)$ définies par $e_n^{(k)} = \delta_{nk}$. On note par $\|\cdot\|_1$ (resp. $\|\cdot\|_\infty$) la norme usuelle dans l^1 (resp. l^∞).

1. Soit L une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbb{N}^*)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $b_k = L(e^{(k)})$. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^1$.
   (i) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n b_n$ converge.
   (ii) En utilisant $L(c)$ pour un $c \in \ell^1$ approprié, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n b_n|$ converge.
2. À l'aide de l'exercice 38, en déduire que, pour toute forme linéaire continue L sur ℓ^1, il existe $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^\infty$ telle que, pour tout $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^1$, $L(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ et $\|L\| = \|b\|_\infty$.
3. En déduire qu'il existe une isométrie bijective du dual $(\ell^1)'$ de ℓ^1 sur ℓ^∞.

Exercice 40. : Soit $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, le produit scalaire étant linéaire à droite. On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Soit M une application linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ telle que

$$\forall h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \quad \langle h, Mh\rangle > 0. \tag{11}$$

1. Montrer que M est injective en montrant que son noyau est réduit à $\{0\}$. En particulier, l'inverse M^{-1} de M est bien défini de l'image $I(M)$ de M à valeurs dans $\mathcal{H}$ et est linéaire.
2. Soit A une application linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ telle que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $Q(h) := \langle h, Ah\rangle \ge 0$. Pour $h, k \in \mathcal{H}$, on pose

$$f(h;k) \; = \; Q(h+k) \, - \, iQ(h+ik) \, - \, (1-i)(Q(h) \, + \, Q(k)) \, .$$

   a. Pour $h, k \in \mathcal{H}$, montrer que $f(h;k) = 2\langle h, Ak\rangle$ et $\overline{f(h;k)} = 2\langle k, Ah\rangle$.

b. En déduire que, pour tous $h, k \in \mathcal{H}$, $\langle h, Ak \rangle = \langle Ah, k \rangle$.

3. Soit E, F deux espaces de Banach complexes. On note par E' et F' leur duaux topologiques respectifs. Soit T une application linéaire de E dans F telle que, pour tout $f' \in F'$, $f' \circ T \in E'$. Montrer que T est continue. (Indication : utiliser le théorème du graphe fermé.)
4. Soit A l'application linéaire de la question 2. Montrer que A est continue. (Indication : utiliser la question 3.)
5. Déduire des questions précédentes que $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si et seulement si M est surjective. (Indication : on pourra utiliser la question 4 avec $A = M^{-1}$ pour l'implication "$\Leftarrow$" seulement).
6. Donner un exemple d'application M dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vérifiant (11) et telle que $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}))$.
7. Donner un exemple d'application M dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vérifiant (11) et telle que $M^{-1} \notin \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}))$.

Exercice 41. : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit B le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions bornées de $[a; b]$ dans $\mathbb{C}$. On le munit de la norme, pour $f \in B$,

$$\|f\|_\infty \; = \; \sup_{x \in [a;b]} |f(x)| \, .$$

On dit qu'une fonction $g : [a; b] \to \mathbb{C}$ est en escalier s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b$, et $(g_1; \cdots; g_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$, la restriction de g à $]\sigma_{i-1}; \sigma_i[$ est constante égale à g_i. On dit qu'une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ est réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier. On note par E (resp. R) l'ensemble des fonctions en escalier (resp. réglées).

1. Montrer que E et R sont des sous-espaces vectoriels de B.
2. Montrer que R est l'adhérence de E pour la topologie définie par $\| \cdot \|_\infty$.
3. Montrer que R contient les fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{C}$. (Indication : on pourra utiliser le théorème de Heine).
4. Pour $g \in E$, on pose, en utilisant les notations précédentes,

$$I(g) \; = \; \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) g_i \, .$$

   On admet que $I(g)$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ choisie pour décrire g. $I(g)$ est donc bien défini. Montrer que I est une forme linéaire continue sur E de norme $b - a$.
5. Montre que I admet un unique prolongement continu $\tilde{I}$ à R.
6. Montrer que, pour $f \in R$,

$$\left| \tilde{I}(f) \right| \; \leq \; \tilde{I}(|f|) \; \leq \; (b - a) \cdot \|f\|_\infty \, .$$

7. Soit F un espace de Banach. Montrer que l'on peut construire comme précédemment une intégrale $\tilde{I}$ sur les fonctions réglées à valeurs dans F.

$\tilde{I}$ est une intégrale de Riemann sur $[a;b]$.

Exercice 42. : Soit B le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme, pour $g \in B$,

$$\|g\|_\infty \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|\,.$$

Soit $f \in B$ et $\epsilon > 0$. Soit $x_1 < x_2 < x_3$ dans $\mathbb{R}$. On note par $\mathcal{T}$ la topologie la moins fine sur B qui rend toutes les masses de Dirac (les formes linéaires $\delta_a : B \ni g \mapsto g(a)$, $a \in \mathbb{R}$) continues. $\mathcal{T}$ est la topologie de la convergence simple sur $\mathbb{R}$.

1. Représenter sur un dessin les graphes des éléments de $B(f;\epsilon[$, la boule ouverte de centre f et de rayon ϵ, pour la topologie définie par $\|\cdot\|_\infty$, et ceux des éléments du voisinage ouvert de f pour la topologie $\mathcal{T}$ donné par
$$V(f;\epsilon) \;=\; \bigcap_{i\in\{1;2;3\}} \delta_{x_i}^{-1}\big(]f(x_i)-\epsilon; f(x_i)+\epsilon[\big)\,.$$
2. Montrer que $B(f;\epsilon[\subset V(f;\epsilon)$. En particulier, $V(f;\epsilon)$ est un voisinage de f pour la topologie définie par $\|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que $V(f;\epsilon)$ n'est pas un ensemble borné pour $\|\cdot\|_\infty$.
4. Montrer que $B(f;\epsilon[$ n'est pas un voisinage de f pour $\mathcal{T}$.

Exercice 43. : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

1. Expliquer pourquoi toute suite bornée de $\mathcal{H}$ admet une sous-suite qui converge faiblement.
2. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comparer $|x|$ avec $sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$.
3. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x et si $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|x|$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x en norme.
4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée. Montrer qu'elle converge faiblement vers 0.

Exercice 44. : Soit $1 < q \leq \infty$ et $E = \ell^q(\mathbb{N};\mathbb{R})$ muni de sa norme usuelle notée $\|\cdot\|_q$. Soit $b, c \in E$ avec $b \neq c$. Pour $\lambda \geq 0$, on considère $\varphi_\lambda : E \to \mathbb{R}^+$ définie par, pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\varphi_\lambda(a) = \|a-b\|_q + \lambda\|a-c\|_q$.

1. Montrer que, φ_λ est continue sur E.
2. Montrer que φ_0 atteint son minimum en b.
3. Montrer que φ_1 atteint son minimum en $2^{-1}(b+c)$.

4. Montrer que, si
$$\|a\|_q \ \geq 2(1+\lambda)^{-1}\big(\|b\|_q + \lambda\|c\|_q\big)$$
alors $\varphi_\lambda(a) \geq \varphi_\lambda(0)$. En déduire que
$$\inf \varphi_\lambda \ = \ \inf\bigg\{\varphi_\lambda(a);\ a \in B\Big(0; 2(1+\lambda)^{-1}\varphi_\lambda(0)\Big]\bigg\}\,.$$
5. On identifie E avec $(\ell^p)'$ pour $p^{-1}+q^{-1}=1$. Soit $\lambda \geq 0$. On considère une suite $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers $a \in E$ pour la topologie $*$-faible. Montrer que
$$\varphi_\lambda(a) \ \leq \ \liminf_{k\to\infty} \varphi_\lambda(a^{(k)})\,.$$
6. Montrer qu'il existe une suite bornée $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans E telle que
$$\lim_{k\to\infty} \varphi_\lambda\big(a^{(k)}\big) \ = \ \inf \varphi_\lambda\,.$$
7. Expliquer pourquoi il existe une sous-suite $(v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge pour la topologie $*$ faible. On note v sa limite.
8. En déduire que $\varphi_\lambda(v) = \inf \varphi_\lambda$.

Exercice 45. : Soit $\chi \in C^\infty$ une fonction paire telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, et χ est décroissante entre 1 et 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit χ_n définie par $\chi_n(x) = \chi(nx)$. Soit $C^\infty_{[-2;2]}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^∞ et à support dans $[-2;2]$, muni de la norme
$$\|\varphi\|_\infty \ = \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,.$$

1. Construire une fonction χ vérifiant les hypothèses précédentes. (Indication : on pourra utiliser la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ donnée par $g(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$ et $g(t) = 0$ si $t \leq 0$.)
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi_n \in C^\infty_{[-2;2]}$ et $\|\chi_n\|_\infty = 1$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{-1/2}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Vérifier que f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général
$$u_n \ = \ -\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_n'(x)\,dx$$
tend vers $+\infty$.
5. En déduire que l'application linéaire
$$C^\infty_{[-2;2]} \ni \varphi \ \mapsto \ -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx \ \in \mathbb{C}$$
n'est pas continue pour la topologie sur $C^\infty_{[-2;2]}$ associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

6. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $h(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $h(x) = 1 + x$ si $-1 \leq x \leq 0$ et $h(x) = 1 - x$ si $0 \leq x \leq 1$. Vérifier que h n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que h est 1-lipschitzienne (donc uniformément continue) sur $\mathbb{R}$.
7. Pour $n \geq 2$, soit $\psi_n = nc^{-1}\chi_n$, où $c = \int_{\mathbb{R}} \chi > 0$. Montrer que, pour $n \geq 2$, les fonctions $\psi_n * h$, définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_n * h(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x-t)h(t)\,dt \;=\; \int_{\mathbb{R}} \psi_n(t)h(x-t)\,dt\,,$$

appartiennent à $C^\infty_{[-2;2]}$.
8. Montrer que $(\psi_n * h)_{n\geq 2}$ converge uniformément vers h. (Indication : on pourra écrire que $h(x) = h(x)\int_{\mathbb{R}} \psi_n(t)dt$ et utiliser que h est uniformément continue.)
9. En déduire que $C^\infty_{[-2;2]}$ n'est pas fermé pour la topologie associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 46. : Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par $p(x_1; x_2) = |x_2|$. Soit $P = \{p\}$.

1. Vérifier que p est une semi-norme sur $\mathbb{R}^2$ mais que p n'est pas une norme.
2. Dessiner dans le plan le voisinage ouvert V de 0 pour $\mathcal{T}_P$ donné par $V = \{x \in \mathbb{R}^2; p(x) < 1\}$.
3. Montrer que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_P)$ n'est pas séparé.

Exercice 47. : Soit $p_1, p_2, p_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ définie par $p_i(x_1; x_2; x_3) = |x_i|$, pour $i \in \{1, 2; 3\}$. Soit $P = \{p_1; p_2; p_3\}$ et $P_1 = \{p_2; p_3\}$.

1. Vérifier que, pour $i \in \{1, 2; 3\}$, p_i est une semi-norme sur $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $v_1 = (10; 0; 0)$, $v_2 = (-1; 3; 0)$ et $v_3 = (0; 2; 0)$. Dessiner dans l'espace les ouverts pour $\mathcal{T}_P$

$$U \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}^3; p_2(x - v_2) < 1\big\} \bigcap \big\{x \in \mathbb{R}^3; p_3(x - v_3) < 2\big\}$$

et

$$V \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}^3; p_1(x - v_1) < 3\big\} \cap U\,.$$

3. Vérifier que $w = (200; 3{,}5; 1) \in U$. Trouver $\epsilon > 0$ tel que

$$\big\{x \in \mathbb{R}^3; p_2(x - w) < \epsilon\big\} \bigcap \big\{x \in \mathbb{R}^3; p_3(x - w) < \epsilon\big\} \;\subset\; U\,.$$

4. Vérifier que $z = (2; 2{,}5; 1) \in V$. Trouver $\epsilon > 0$ tel que

$$\bigcap_{p\in P} \big\{x \in \mathbb{R}^3; p(x - z) < \epsilon\big\} \;\subset\; V\,.$$

5. Montrer que $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_{P_1})$ n'est pas séparé.

6. Montrer que $\mathcal{T}_P$ coïncide avec la topologie définie par une norme de $\mathbb{R}^3$.
7. Montrer qu'une boule ouverte n'est pas un ouvert pour $\mathcal{T}_{P_1}$.

Exercice 48. : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}^+$ une semi-norme non nulle.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $f \in E$ tel que $p(f) > 0$. Montrer qu'il existe $\lambda_a \in \mathbb{R}^+$ tel que $p(\lambda_a f) = a$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$.
   a). Vérifier que $p^{-1}(]a-\epsilon; a+\epsilon[) = \emptyset$ si $a + \epsilon \leq 0$.
   b). Vérifier que $p^{-1}(]a-\epsilon; a+\epsilon[) = \{f \in E; p(f - 0_E) < a + \epsilon\}$ si $a - \epsilon < 0$.
   c). On suppose que $a - \epsilon \geq 0$. Montrer que

$$p^{-1}\big(]a-\epsilon; a+\epsilon[\big) \;=\; \bigcup_{f \in p^{-1}(]a-\epsilon;a+\epsilon[)} \left\{ g \in E; p\Big(g - \frac{a}{p(f)} f\Big) < \epsilon \right\}.$$

Exercice 49. : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et P_f un ensemble **fini** de semi-normes $p : E \to \mathbb{R}^+$. Pour $p \in P_f$, soit $\epsilon_p > 0$, $f_p \in E$. Soit $g \in U$ où

$$U \;=\; \bigcap_{p \in P_f} \big\{ f \in E\,;\; p(f - f_p) \;<\; \epsilon_p \big\}.$$

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $g \in V \subset U$, pour

$$V \;=\; \bigcap_{p \in P_f} \big\{ f \in E\,;\; p(f - g) \;<\; \epsilon \big\}.$$

(Indication : on pourra considérer les $\delta_p > 0$ tels que $(1 - \delta_p)\epsilon_p = p(g - f_p)$ et choisir $\epsilon = \min\{\delta_p \epsilon_p; p \in P_f\}$.).

Exercice 50. : Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}$ (par exemple $K = [a; b]$ avec $a < b$). Soit C_K^∞ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^∞ et à support dans K, muni des semi-normes, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k(f) \;=\; \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|\,,$$

$f^{(k)}$ désignant la dérivée $k$ième de f. Pour $f, g \in C_K^\infty$, on pose

$$d(f; g) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot \frac{p_k(f-g)}{1 + p_k(f-g)}.$$

On remarque que $d(f; g) = d(g; f)$. On va montrer que d est une distance sur C_K^∞ et que, muni de cette distance, C_K^∞ est complet.

1. Vérifier que, pour $f, g \in C_K^\infty$, $d(f; g)$ est bien défini dans $\mathbb{R}^+$.

2. Vérifier que, pour $f \in C_K^\infty$, $d(f;f) = 0$. Montrer que si, pour $f, g \in C_K^\infty$, $d(f;g) = 0$ alors $f = g$.
3. Soit $(r;s;t) \in (\mathbb{R}^+)^3$ tel que $r \leq s + t$. Vérifier que
$$\frac{r}{1+r} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}.$$
4. Soit $f, g, h \in C_K^\infty$. Montrer que $d(f;h) \leq d(f;g) + d(g;h)$. En déduire que d est une distance sur C_K^∞.
5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans C_K^∞ pour la distance d. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f à support dans K.
6. Montrer que f est de classe C^∞ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$.
7. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour d. (Indication : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée.)

Remarque : on peut montrer que la topologie associée à la distance d est la même que celle définie à partir des semi-normes p_k (cf. cours).

Exercice 51. : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). Pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, on pose
$$\|\varphi\|_{\infty,\Omega} = \sup_{x\in\Omega} \big|\varphi(x)\big|.$$

1. Construire une fonction non nulle $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ dont le support est contenu dans la boule fermée $B(0;1]$. (Indication : on pourra utiliser la fonction g introduite au 1. de l'exercice 45).
2. Soit $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(a;r] \subset \Omega$. Construire une fonction non nulle $\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ dont le support est contenu dans $B(a;r]$. (Indication : on pourra utiliser $x \mapsto \chi((x-a)/m)$ pour un $m > 0$ approprié).
3. Avec les notations du cours, on suppose que $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ est continue en 0 sur $(C_c^\infty(\Omega;;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_0})$. Montrer qu'il existe un compact K inclus dans Ω, $n \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que
$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\ \|\varphi\|_{\infty,\Omega} \leq C \cdot p_{n,K}(\varphi).$$
4. Construire une fonction non nulle $\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, nulle sur K. En déduire que $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ n'est pas continue sur $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_0})$.
5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω telle que $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini ou bien telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $x \in \partial\Omega$, la frontière de Ω. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(x_n;r_n] \subset \Omega$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments non nuls de $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le support de φ_n est inclu dans $B(x_n;r_n]$. Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_P)$.

6. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, non nulle, et $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ par $\varphi_n(x) = \varphi(x + n\eta)$. Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}), \mathcal{T}_P)$.

Exercice 52. : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). On utilise les notations du cours. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\chi_n \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $\chi_n = 1$ sur K_n et $\mathrm{supp}\chi_n \subset \mathring{K}_{n+1}$. On peut construire de telles fonctions à l'aide de l'exercice 62.

1. Pour $\varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, montrer que $(\chi_n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$.
2. En déduire que $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$.
3. En déduire que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Exercice 53. : On utilise les notations du cours. Soit $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, ($d \geq 1$), telle que $\alpha = 1$ au voisinage de 0. (On peut construire une telle fonction à l'aide de la fonction g introduite au 1. de l'exercice 45). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ donnée par $\alpha_n(x) = \alpha(x/n)$.

1. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, montrer que $(\alpha_n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.
2. En déduire que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Exercice 54. : Théorème de Borel. Pour toute suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) \ = \ a_n \,.$$

(Indication : on pourra chercher f sous la forme

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}\,\varphi(\lambda_n x)\,,$$

où $\lambda_n > 0$, pour tout $\in \mathbb{N}$, et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ à support dans $[-2;2]$ telle que $\varphi = 1$ sur $[-1;1]$.)

Exercice 55. : Parmi les opérations suivantes, déterminer celles qui sont des distributions sur $\mathbb{R}$. Déterminer le support de ces dernières.

1. $T_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$.
2. $T_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \delta_{1/n}$.
3. $T_3 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_0^{(n)}$. (Indication : on pourra utiliser le théorème de Borel).
4. T_4 donnée par
$$T_4(\varphi) \ = \ \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx\,.$$

Exercice 56. : Déterminer le support et l'ordre des distributions sur $\mathbb{R}$ suivantes.

1. $T_1 = \delta_0^{(2)}$.
2. $T_2 = (f_1\delta_0)'$, où $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_1(x) = x$.
3. $T_3 = (f_1\delta_0')'$.

Exercice 57. : Parmi les opérations suivantes, déterminer celles qui sont des distributions sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer le support de ces dernières.

1. T_1 donnée par
$$T_1(\varphi) \ = \ \int_0^{+\infty} \varphi(x;x)\,dx\,.$$
2. T_2 donnée par
$$T_2(\varphi) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0;x)\,dx\,.$$
3. T_3 donnée par
$$T_3(\varphi) \ = \ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(x_1;x_2)}{|x_1-x_2|^2}\,dx_1dx_2\,.$$
4. T_4 donnée par
$$T_4(\varphi) \ = \ \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1;x_2)\cdot x_2\cdot \big(\ln|x_1|\big)\,dx_1dx_2\,.$$

Exercice 58. : Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\langle t\rangle = (1+t^2)^{1/2}$. Soit f une fonction mesurable et positive sur $\mathbb{R}$. On montre le résultat suivant : la mesure $\mu = f(x)dx$ définit une distribution tempérée $\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu$ si et seulement si il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall R \geq 0\,,\ \int_{-R}^{R} f(x)dx \ \leq \ C\langle R\rangle^m\,. \tag{12}$$

1. On suppose que $\mu \in \mathcal{S}'$. Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$ à support dans $[-2;2]$ telle que $\theta = 1$ sur $[-1;1]$. En utilisant $\theta_R(x) = \theta(x/R)$, trouver $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que (12) soit valable.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une semi-norme p_k sur $\mathcal{S}$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$,
$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi|\,d\mu \ \leq \ p_k(\varphi)\cdot \int_{\mathbb{R}} \langle x\rangle^{-k}\,d\mu(x)\,.$$
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_{\mathbb{R}} \langle x\rangle^{-k}\,d\mu(x) \ \leq \ \sum_{p=0}^{\infty} \langle p\rangle^{-k} \int_{-p-1}^{p+1} d\mu\,.$$
4. On suppose que (12) vraie pour certains $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède que $\mu \in \mathcal{S}'$.

5. La mesure x^2dx définit-elle une distribution tempérée ? Et la mesure $e^x dx$?

Remarque : dès que la fonction f est localement intégrable, la mesure μ définit une distribution.

Exercice 59. : Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$.

1. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Montrer que $(T_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Elle converge donc vers un certain $T(\varphi) \in \mathbb{C}$. Cela définit donc une application $T : C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.
2. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ et que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$.

Remarque : On peut montrer de manière similaire que les duaux des espaces $(C^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_Q)$, $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_K})$, pour $K \subset\subset \Omega$, et $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}), \mathcal{T}_S)$, sont complets.

Exercice 60. : On utilise les notations du cours. Soit $\mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur Ω à support compact. On note par $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions φ continues sur Ω vérifiant

$$\forall \epsilon > 0\,,\, \exists m \in \mathbb{N}\,;\, \forall x \in \Omega\,,\ x \notin K_m \implies |\varphi(x)| \,<\, \epsilon\,.$$

C'est l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 “sur le bord de Ω”.
Soit $p \in [1; +\infty[$. On admet que $\mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C})$.
On rappelle que, pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$,

$$f * g(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,dt \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,dt$$

est presque partout absolument convergente. De plus, $f * g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.
Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ telle que $\chi \ge 0$, supp $\chi \subset B(0;1[$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \chi = 1$. (On peut prendre, par exemple, $\chi(x) = cg(1-4|x|^2)$ où g est la fonction introduite au 1. de l'exercice 45 et où c est choisi de sorte que l'intégrale de χ soit 1).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\chi_n(x) = n^d \chi(nx)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_n = 1$.
2. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi_n * \psi$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et que
$$\mathrm{supp}\,(\chi_n * \psi) \;\subset\; \left\{x \in \mathbb{R}^d\,;\ \mathrm{dist}(x;\mathrm{supp}\,\psi) \;\le\; 1/n\right\}.$$
3. En déduire que $\|(\chi_n * \psi) - \psi\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$. (Indication : on pourra utiliser le fait que ψ est uniformément continue).
4. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{C})$. Soit ψ le prolongement par 0 de φ à $\mathbb{R}^d$. Montrer que, pour n assez grand, $\chi_n * \psi$ est à support compact dans Ω. Vérifier que $\|(\chi_n * \psi)_{|\Omega} - \varphi\|_{\infty,\Omega} \to 0$, quand $n \to \infty$.

5. Montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$.
6. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$.
7. Montrer que $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{C})$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}_b(\Omega;\mathbb{C})$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$.
8. Montrer que $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C})$.
9. Soit $f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$, $\epsilon > 0$ et $\mathcal{K}$ une famille finie de compacts inclus dans Ω. Soit
$$V = \bigcap_{K\in\mathcal{K}} \left\{g \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})\,;\ r_{K,p}(g-f) < \epsilon\right\}.$$
Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ tel que $\varphi \in V$. (Indication : en notant par K' la réunion de tous les compacts de la famille $\mathcal{K}$, on pourra approximer $\mathbb{1}_{K'} f \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C})$ par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$).
10. En déduire que $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$.

Exercice 61. : Topologie sur $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$, $p \in [1;+\infty]$. On utilise les notations du cours. Dans ce dernier, on a équipé cet espace de la famille R_p des semi-normes $r_{K,p}(f) = \|f_{|K}\|_{K,p}$, pour K compact inclu dans Ω. On considère aussi la famille de semi-normes $R'_p = \{r_{K_n,p}; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $f \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{K_n,p}(f) = 0$. Montrer que $f = 0$. (Indication : dans le cas $p < \infty$, on pourra appliquer le théorème de Beppo-Lévi à la suite $(|f|^p \mathbb{1}_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$; dans le cas $p = \infty$, on pourra utiliser la σ-sous-additivité de la mesure de Lebesgue).
2. En déduire que la topologie $\mathcal{T}_{R'_p}$ est séparée.
3. Soit $\mathcal{K}$ un ensemble fini de compacts inclus dans Ω. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $K \in \mathcal{K}$, $r_{K,p} \leq r_{K_n,p}$.
4. En déduire que $\mathcal{T}_{R'_p} = \mathcal{T}_{R_p}$.

Exercice 62. : Soit ω_0, ω_1 des ouverts de Ω tels que $\overline{\omega_0} \subset \omega_1$. Construire une fonction $\chi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ sur ω_0 et $\operatorname{supp}\chi \subset \omega_1$. (Indication : On pourra convoler la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\omega'_0}$ d'un ouvert ω'_0 approprié tel que $\overline{\omega_0} \subset \omega'_0 \subset \overline{\omega'_0} \subset \omega_1$ avec la fonction χ_n de l'exercice 60, pour un n convenable).

Exercice 63. : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{supp} T \neq \Omega$.

1. Soit $\epsilon > 0$, $\omega = (\operatorname{supp} T + B(0;2\epsilon[) \cap \Omega$ et $F = (\operatorname{supp} T + B(0;\epsilon]) \cap \Omega$. Montrer qu'il existe $\chi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $\chi = 1$ sur F et $\operatorname{supp}\chi \subset \omega$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Montrer que $T(\varphi) = T(\chi\varphi)$. (Indication : on pourra écrire que $T(\varphi) = T(\chi\varphi) + T((1-\chi)\varphi)$.
3. En déduire que, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ est nulle au voisinage du support de T alors $T(\varphi) = 0$.

4. Soit $\varphi_0 \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $K = \operatorname{supp}\varphi_0 \cap \operatorname{supp} T$ est non vide. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\psi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, $|T(\psi)| \leq Cp_{m,K}(\psi)$. En déduire que, si, de plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha\varphi_0$ est nulle sur supp T, alors $T(\varphi_0) = 0$.
5. On suppose désormais que T est d'ordre $m \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi_0 \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $K = \operatorname{supp}\varphi_0 \cap \operatorname{supp} T$ est non vide et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha\varphi_0$ est nulle sur supp T. Montrer que $T(\varphi_0) = 0$.

Exercice 64. : Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = it$. Soit $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{1}(t) = 1$. Pour une fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on pose

$$T_g^t : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} g\varphi \in \mathbb{C}\,,$$

lorsque cette application est bien définie. On rappelle que, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$,

$$\hat{\varphi} \ : \ \mathbb{R} \ni \xi \ \mapsto \ \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx \ \in \ \mathbb{C}\,.$$

On **admet** le résultat suivant : Une distribution tempérée T (i.e. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$) est solution de l'équation $fT = 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $T = k\delta_0$.

1. Vérifier que T_H^t et $T_{\mathbb{1}}^t$ sont des distributions tempérées (i.e. $T_H^t, T_{\mathbb{1}}^t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$).
2. Montrer que $(T_H^t)' = \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser la formule des sauts dans $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$).
3. En déduire que la transformée de Fourier $F'(T_H^t)$ de T_H^t est solution de l'équation d'inconnue $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$ donnée par $fT = T_{\mathbb{1}}^t$.
4. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ une fonction paire (i.e., pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\psi(-\xi) = \psi(\xi)$). Montrer que $F'(T_H^t)(\psi) = \pi\psi(0)$.
5. En déduire que
$$F'(T_H^t) \ = \ -i\,\mathrm{vp}\frac{1}{\xi} \ + \ \pi\delta_0\,.$$

Exercice 65. : Soit $d \in \mathbb{N}$ avec $d \geq 3$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$, définie par $f(x) = |x|^{2-d}$,

$$|x| \ := \ \Big(\sum_{j=1}^d x_j^2\Big)^{1/2}\,.$$

Pour $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$(\Delta h)(x) \ = \ \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x)\,.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (|x|^2 + 1/n)^\alpha$ avec $\alpha = (2-d)/2 = 1 - d/2$. Montrer que $(T_{f_n})_n$ converge vers T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\Delta f_n)(x) \;=\; \frac{2\alpha d}{n}\big(|x|^2 + 1/n\big)^{\alpha-2}.$$

3. Montrer $(T_{\Delta f_n})_n$ converge vers $c^{-1}\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, pour un réel $c \neq 0$. En déduire que T_{cf} est une solution fondamentale du laplacien Δ.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^d$. On considère la distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ donnée par

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_k}\,.$$

Vérifier que S est à support compact. En déduire une solution de l'équation d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ donnée par $\Delta T = S$ de la forme $T = T_g$, pour une fonction localement intégrable $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ que l'on précisera.

Exercice 66. : On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ dont la restriction à l'intervalle $[p; p+1[$ est la fonction constante égale à p, pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Étant donnée une partie A de $\mathbb{R}$, on note par $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique définie par $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\mathbb{1}_A(t) = 1$, si $t \in A$, et $\mathbb{1}_A(t) = 0$, si $t \notin A$. Pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose

$$T_g : \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} g\varphi \;\in\; \mathbb{C}\,,$$

lorsque cette application est bien définie.

1. Vérifier que T_E est bien définie et que $T_E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.
2. Montrer la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ de la série de distributions $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ (il s'agit donc de montrer que la suite $(\sum_{-n\leq k\leq n} \delta_k)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{C})$). On appelle S la somme de cette série (donc $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{C})$).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n = E \cdot \mathbb{1}_{[-n;n]}$. Vérifier que $T_{E_n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{C})$,

$$\big(T_{E_n}\big)' \;=\; -n\delta_{-n} + (1-n)\delta_n + \sum_{k=-n+1}^{n-1} \delta_k \;=\; -(n+1)\delta_{-n} - n\delta_n + \sum_{k=-n}^{n} \delta_k\,.$$

4. Montrer que $(T_{E_n})_n$ converge vers T_E dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.
5. En déduire que

$$\big(T_E\big)' \;=\; S \;=:\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k\,.$$

Exercice 67. : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x;y) = (2\pi(x+iy))^{-1}$. Pour $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$(\partial_{\overline{z}} h)(x;y) \;=\; \frac{\partial h}{\partial x}(x;y) \;+\; i\frac{\partial h}{\partial y}(x;y)\,.$$

On **rappelle** la formule de Stokes. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont le bord $\partial\Omega$ est une réunion de courbes de classe C^1. Pour $u, v \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{C})$,

$$\int_\Omega \Big(u\frac{\partial v}{\partial x}\Big)(x;y)\,dxdy \;+\; \int_\Omega \Big(v\frac{\partial u}{\partial x}\Big)(x;y)\,dxdy \;=\; \int_{\partial\Omega} \big(uvn_x\big)(\sigma)\,d\sigma\,, \quad (13)$$

$$\int_\Omega \Big(u\frac{\partial v}{\partial y}\Big)(x;y)\,dxdy \;+\; \int_\Omega \Big(v\frac{\partial u}{\partial y}\Big)(x;y)\,dxdy \;=\; \int_{\partial\Omega} \big(uvn_y\big)(\sigma)\,d\sigma\,, \quad (14)$$

où $\partial\Omega$ est orienté positivement et $(n_x;x_y)(\sigma)$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ au point $\sigma \in \partial\Omega$.

1. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, montrer que f est C^1 et que $\partial_{\overline{z}} f$ est nulle.
2. Soit $\epsilon > 0$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. En appliquant les formules de Stokes précédentes à un domaine Ω approprié, montrer que
$$\int_{|x+iy|\geq\epsilon} \big(f(\partial_{\overline{z}}\varphi)\big)(x;y)\,dxdy \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\big(\epsilon e^{i\theta}\big)\,d\theta\,.$$
3. En déduire que T_f est une solution fondamentale de $\partial_{\overline{z}}$.
4. Montrer que $\partial_{\overline{z}}$ est hypoelliptique.