L3M, Analyse complexe.

Contrôle continu du 6 novembre 2023, **60 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac. Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. **Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée.**

Notations : On désigne par $\Re(z)$ (resp. $\Im(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp. La détermination principale du logarithme (resp. de l'argument) est notée Log (resp. Arg). Ces deux dernières fonctions sont définies sur

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \;=\; \big\{z \in \mathbb{C};\ (\Im(z) \neq 0) \text{ ou } (\Im(z) = 0 \text{ et } \Re(z) > 0)\big\}\,.$$

Les fonctions cosinus et sinus sont notées cos et sin respectivement.

Exercice 1. : 4 pts.
Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = |\exp(z)|$.

1. Montrer que g est majorée sur l'ensemble

$$\mathcal{P} = \big\{z \in \mathbb{C};\ \Re(z) = -(\Im(z))^2 + 4\big\}\,.$$

2. La fonction g est-elle majorée sur la droite $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C};\ \Im(z) = 2\Re(z) + 3\}$?

3. Même question avec la droite $\mathcal{D}_1$ remplacée par la demi-droite

$$\mathcal{D}_2 = \{z \in \mathbb{C}^*;\ \mathrm{Arg}\,(z) = \theta\}$$

avec $\theta \in [\pi/2; \pi]$.

Exercice 2. : 4 pts.
Étant données deux fonctions $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on considère l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ f(z) \;=\; P\big(\Re(z); \Im(z)\big) \;+\; iQ\big(\Re(z); \Im(z)\big)\,.$$

1. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ lorsque

$$\forall\,(x; y) \in \mathbb{R}^2\,,\quad P(x; y) \;=\; x^3 \,-\, 3xy^2 \quad \text{et} \quad Q(x; y) \;=\; 3x^2y \,-\, y^3\,.$$

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall\,(x;y) \in \mathbb{R}^2\,,\quad \begin{aligned} P(x;y) &= e^x\big(x\cos(y) - y\sin(y)\big) \quad , \\ Q(x;y) &= e^x\big(y\cos(y) - ax\sin(y)\big) \quad . \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble A des nombres réels a pour lesquels la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3. : 5 pts.
Soit $r : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $r(z) = \exp((1/4)\mathrm{Log}\,(z))$.

1. Montrer que r est bien définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
2. Montrer que r est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
3. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $r(z)^4 = z$.
4. Trouver deux nombres complexes z_1 et z_2, appartenant à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, tels que $z_1 z_2$ appartienne aussi à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $r(z_1)r(z_2) \neq r(z_1 z_2)$.

Exercice 4. : 4 pts.
On considère la série entière s donnée par

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1)3^n z^{2n} \,.$$

1. Déterminer son rayon de convergence, noté R.
2. Montrer que sa somme est donnée, sur son disque de convergence, par une fraction rationnelle que l'on explicitera.
(Indication : on pourra utiliser la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 3^n z^{2n+1}$.)

Exercice 5. : 5 pts.
Déterminer le plus grand sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ sur lequel l'expression, dépendant d'un nombre complexe z,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\big(nz^2\big)$$

est bien définie. Vérifier que Ω est ouvert. La fonction $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $z \in \Omega$,

$$h(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \exp\big(nz^2\big)\,,$$

est-elle holomorphe sur Ω ?

L3M, Analyse complexe.

Correction du contrôle continu du 6 novembre 2023.

Exercice 1, 4 pts :
Par le cours, on sait que, pour $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = \exp(\Re(z))$.

1. Pour $z \in \mathcal{P}$, on a $\Re(z) = -(\Im(z))^2 + 4 \leq 4$ donc $g(z) = \exp(\Re(z)) \leq \exp(4)$, car l'exponentielle réelle est croissante. On a montré que g est majorée par $\exp(4)$ sur $\mathcal{P}$. **1 pt.**

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\gamma(t) := t + i(2t+3) \in \mathcal{D}_1$ et $g(\gamma(t)) = \exp(\Re(\gamma(t))) = \exp(t)$. Soit $M > 0$. Comme l'exponentielle réelle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $T > 0$ tel que, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$t > T \implies \exp(t) > M\ .$$
Comme $T + 1 > T$, on a donc $\exp(T+1) > M$ et $g(\gamma(T+1)) = \exp(T+1) > M$, avec $\gamma(T+1) \in \mathcal{D}_1$. Donc g n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_1$. **1,5 pts.**

3. Pour tout $z \in \mathcal{D}_2$, $z = |z|\exp(i\theta)$ donc $g(z) = \exp(\Re(z)) = \exp(|z|\cos(\theta))$. Comme $\theta \in [\pi/2; \pi]$, on sait, par le cours, que $\cos(\theta) \leq 0$ donc $|z|\cos(\theta) \leq 0$, puisque $|z| \geq 0$. Comme l'exponentielle réelle est croissante, on a, pour $z \in \mathcal{D}_2$, $g(z) = \exp(|z|\cos(\theta)) \leq \exp(0) = 1$. Donc g est majorée par 1 sur $\mathcal{D}_2$. **1,5 pts.**

Exercice 2, 4 pts :

1. Les fonctions P et Q sont polynômiales en les variables x et y donc sont de classe C^1. De plus, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial P}{\partial x}(x;y) = 3x^2 - 3y^2\ , \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x;y) = -6xy\ ,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x;y) = 6xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x;y) = 3x^2 - 3y^2\ .$$
On constate que, sur $\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Par le cours, f est $\mathbb{C}$-dérivable (ou holomorphe) sur $\mathbb{C}$. **1,5 pts.**

2. Par produit et composition de fonctions C^1 d'une variable réelle avec les fonctions C^1 données par $(x; y) \mapsto x$ et $(x; y) \mapsto y$, P et Q sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. D'après le cours, f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si on a
$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^2\right) \quad (S)\ .$$

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x}(x;y) &= e^x\Big((x+1)\cos(y) - y\sin(y)\Big)\,, \\
\frac{\partial P}{\partial y}(x;y) &= -e^x\Big((x+1)\sin(y) + y\cos(y)\Big)\,, \\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x;y) &= e^x\Big(y\cos(y) - a(x+1)\sin(y)\Big)\,, \\
\frac{\partial Q}{\partial y}(x;y) &= e^x\Big((1-ax)\cos(y) - y\sin(y)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Comme l'exponentielle ne s'annule pas, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x;y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x;y)\right) &\iff \Big((x+1)\cos(y) - y\sin(y) = (1-ax)\cos(y) - y\sin(y)\Big) \\
&\iff \Big((x+1)\cos(y) = (1-ax)\cos(y)\Big) \\
&\iff \Big((1+a)x\cos(y) = 0\Big)\,.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x;y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x;y)\right) &\iff \Big((x+1)\sin(y) + y\cos(y) = y\cos(y) - a(x+1)\sin(y)\Big) \\
&\iff \Big((x+1)\sin(y) = -a(x+1)\sin(y)\Big) \\
&\iff \Big((1+a)(x+1)\sin(y) = 0\Big)\,.
\end{aligned}$$

Comme les fonctions $(x;y) \mapsto x\cos(y)$ et $(x;y) \mapsto (x+1)\sin(y)$ ne sont pas identiquement nulles, on a

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \Big(\forall\,(x;y) \in \mathbb{R}^2\,,\quad (1+a)x\cos(y) = 0 \quad \text{et} \quad (1+a)(x+1)\sin(y) = 0\Big) \\
&\iff \Big(1+a = 0\Big) \iff \Big(a = -1\Big)\,.
\end{aligned}$$

On a donc montré que l'ensemble A est précisément le singleton $\{-1\}$. **2,5 pts.**

Exercice 3, 5 pts :

1. Par le cours, la fonction Log est définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. Comme l'exponentielle est définie sur $\mathbb{C}$, r est bien définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ comme composition. **0,5 pt.**

2. Par le cours, la fonction Log est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et la fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Par la préservation de l'holomorphie par multiplication et composition (cf. cours), r est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. **1 pt.**

3. D'après le cours, on a, pour tout $w \in \mathbb{C}$, $\exp(w)^4 = \exp(4w)$. Donc, pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$,

$$r(z)^4 \;=\; \exp\Big(4 \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\,(z)\Big) \;=\; \exp\Big(\mathrm{Log}\,(z)\Big) \;=\; z\,,$$

car Log est la bijection réciproque de la restriction de l'exponentielle complexe à $\mathrm{Log}\,(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-) = \{w \in \mathbb{C}; \Im(w) \in]-\pi;\pi[\}$, d'après le cours. **1,5 pts.**

4. On a vu en td que $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- = \{w \in \mathbb{C}^*; \mathrm{Arg}\,(w) \neq \pi\}$.
On choisit $z_1 = z_2 = \exp(i3\pi/4)$. On a $z_1z_2 = z_1^2 = \exp(2\cdot i3\pi/4) = \exp(i3\pi/2)$ dont l'argument principal est $-\pi/2$. Comme $\mathrm{Arg}\,(z_1z_2) \neq \pi$, $z_1z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et $\mathrm{Log}\,(z_1z_2) = \ln(|z_1z_2|) + i\mathrm{Arg}\,(z_1z_2) = 0 + i(-\pi/2)$. On a donc $r(z_1z_2) \;=\; \exp(-i\pi/8)$.
On a, par ailleurs,

$$r(z_1)r(z_2) \;=\; r(z_1)r(z_1) \;=\; r(z_1)^2 \;=\; \exp\Big(2\cdot\frac{1}{4}\cdot(0 + i3\pi/4)\Big) \;=\; \exp\big(i3\pi/8\big)\,.$$

Si l'on avait $r(z_1)r(z_2) = r(z_1z_2)$, on aurait $\exp(i3\pi/8) = \exp(-i\pi/8)$, donc, par le cours, on aurait l'existence d'un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $i3\pi/8 - (-i\pi/8) = 2ik\pi$. On aurait donc $\pi/2 = 2k\pi$ soit $k = 1/4$. Contradiction. On a donc $r(z_1)r(z_2) \neq r(z_1z_2)$. **2 pts.**

Exercice 4, 4 pts :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\left|\frac{(2(n+1)+1)3^{n+1}z^{2(n+1)}}{(2n+1)3^nz^{2n}}\right| \;=\; 3\cdot\frac{2n+3}{2n+1}\cdot|z^2| \;=\; 3\cdot\frac{2+3/n}{2+1/n}\cdot|z|^2$$

qui tend vers $3|z|^2$, quand $n \to \infty$. D'après le test de D'Alembert pour les séries, la série s converge absolument si $3|z|^2 < 1$.
Prenons $z \in \mathbb{C}$ tel que $3|z|^2 \geq 1$. Si le terme général de cette série tendait vers 0, son module aussi. Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|(2n+1)3^nz^{2n}\big| \;=\; (2n+1)\cdot\big(3|z|^2\big) \;\geq\; 2n+1 \;>\; 1\,.$$

On a une contradiction. La série s diverge donc grossièrement.
D'après l'équivalence

$$\big(3|z|^2 < 1\big) \iff \big(|z| < 1/\sqrt{3}\big)\,,$$

on en déduit, par le cours, que le rayon de convergence de s est $R = 1/\sqrt{3}$. **1,5 pts.**

2. On considère la série $t = \sum_{n\in\mathbb{N}} 3^nz^{2n+1}$. Sa série dérivée est s. D'après le cours, t a pour rayon de convergence celui de s, à savoir R. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} 3^nz^{2n+1} \;=\; z\cdot\sum_{n=0}^{N}(3z^2)^n\,.$$

Comme $|3z^2| < 1$, la série géométrique à droite de la formule précédente tend vers $1/(1-3z^2)$, quand $N \to +\infty$. Comme la multiplication par z est une application continue sur $\mathbb{C}$, le membre de droite de la formule précédente tend vers $z/(1-3z^2)$, quand $N \to +\infty$. Donc, sur $D(0;R)$, la somme de la série t est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n+1} \; = \; \frac{z}{1-3z^2} \, .$$

Comme la série dérivée de t est s, on a, d'après le cours, sur le disque $D(0;R)$, la $\mathbb{C}$-dérivabilité de la somme de t et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)3^n z^{2n} \; = \; \left(\frac{z}{1-3z^2}\right)' \; = \; \frac{1+3z^2}{(1-3z^2)^2} \, .$$

2,5 pts.

Exercice 5, 5 pts :
D'après le cours, on a, pour tout $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nw) = (\exp(w))^n$. Pour $z \in \mathbb{C}$, la série à étudier s'écrit donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \Big(\exp(z^2)\Big)^n \, .$$

Comme la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} w^n$ converge exactement quand $|w| < 1$ (cf. cours de L1), l'expression considérée a un sens si et seulement si $(|\exp(z^2)| < 1)$. D'après les propriétés de l'exponentielle du cours,

$$\begin{aligned}\Big(|\exp(z^2)| \, < \, 1\Big) \; &\Longleftrightarrow \; \Big(\exp(\Re(z^2)) \, < \, 1\Big) \; \Longleftrightarrow \; \Big(\Re(z^2) \, < \, 0\Big) \\ &\Longleftrightarrow \; \Big(\big(\Re(z)\big)^2 \, - \, \big(\Im(z)\big)^2 \, < \, 0\Big) \; \Longleftrightarrow \; \Big(\big(\Re(z)\big)^2 \, < \, \big(\Im(z)\big)^2\Big) \\ &\Longleftrightarrow \; \Big(\big|\Re(z)\big|^2 \, < \, \big|\Im(z)\big|^2\Big) \; \Longleftrightarrow \; \Big(\big|\Re(z)\big| \, < \, \big|\Im(z)\big|\Big) \, ,\end{aligned}$$

car les valeurs absolues $|\Re(z)|$ et $|\Im(z)|$ sont positives. L'ensemble Ω cherché est donc

$$\Omega \; = \; \big\{z \in \mathbb{C}\, ; \; \big|\Re(z)\big| \, < \, \big|\Im(z)\big|\big\} \, . \quad \textbf{1,5 pts.}$$

Vérifions que Ω est voisinage de chacun de ses points. Soit $z_0 \in \Omega$. On a $|\Re(z_0)| < |\Im(z_0)|$. En particulier, $|\Im(z_0)|^2 - |\Re(z_0)|^2 > 0$. Soit

$$\delta \; = \; \min\Big(1; \; \frac{|\Im(z_0)|^2 - |\Re(z_0)|^2}{4(1 + |\Re(z_0)| + |\Im(z_0)|)}\Big) \; > \; 0 \, .$$

Soit $z \in D(z_0;\delta)$. On a $|\Re(z-z_0)| \le \delta$ et $|\Im(z-z_0)| \le \delta$. Donc

$$\begin{aligned}(\Im(z))^2 \, - \, (\Re(z))^2 \; &= \big(\Im(z-z_0) \, + \, \Im(z_0)\big)^2 \, - \, \big(\Re(z-z_0) \, + \, \Re(z_0)\big)^2 \\ &\ge 0 \, - \, 2\delta|\Im(z_0)| \, + \, |\Im(z_0)|^2 \, - \, \delta^2 \, - \, 2\delta|\Re(z_0)| \, - \, |\Re(z_0)|^2 \\ &\ge |\Im(z_0)|^2 \, - \, |\Re(z_0)|^2 \, - \, 2\delta\left(|\Im(z_0)| \, + \, |\Re(z_0)| \, + \, 1\right)\end{aligned}$$

car $2\delta \geq \delta \geq \delta^2$. En réutilisant la définition de δ, on obtient

$$\begin{aligned}(\Im(z))^2 \,-\, (\Re(z))^2 \;&\geq |\Im(z_0)|^2 \,-\, |\Re(z_0)|^2 \,-\, \frac{1}{2}\left(|\Im(z_0)|^2 \,-\, |\Re(z_0)|^2\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(|\Im(z_0)|^2 \,-\, |\Re(z_0)|^2\right) \;>\; 0\,.\end{aligned}$$

Donc $z \in \Omega$. On a montré que $D(z_0;\delta) \subset \Omega$, ceci pour tout $z_0 \in \Omega$. On a donc montré que Ω est ouvert. **2 pts.**
Soit $z \in \Omega$. D'après les équivalences initiales, $|\exp(z^2)| < 1$. Par les résultats sur les séries géométriques, pour $z \in \Omega$,

$$h(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \exp(nz^2) \;=\; \frac{1}{1 \,-\, \exp(z^2)}$$

et la fonction h est la composition des applications $\Omega \ni z \mapsto z^2$, $Z \mapsto \exp(Z)$ et $D(0;1) \ni w \mapsto 1/(1-w)$. Comme $z \mapsto z$ et $z \mapsto 1$ sont holomorphes, $\Omega \ni z \mapsto z^2$ l'est par produit et, par somme et quotient, $D(0;1) \ni w \mapsto 1/(1-w)$ est aussi holomorphe. Enfin, l'exponentielle est holomorphe (cf. cours). Par composition, h est holomorphe sur Ω. **1,5 pts.**

Pour montrer que Ω est ouvert, on peut aussi procéder comme suit. Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(z) \;=\; \big|\Im(z)\big| \,-\, \big|\Re(z)\big|\,.$$

Par le cours, les fonctions $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$ et $z \mapsto |z|$ sont continues. Donc, par composition et différence, g est continue. Par définition de Ω, $\Omega = g^{-1}(]0;+\infty[)$. Comme $]0;+\infty[$ est ouvert, $\Omega = g^{-1}(]0;+\infty[)$ est ouvert.