L3M, Analyse complexe.

Contrôle continu du 11 décembre 2023, **60 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac. Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. **Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée.**

Notations : On désigne par $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp. La détermination principale du logarithme (resp. de l'argument) est notée Log (resp. Arg). Ces deux dernières fonctions sont définies sur

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \;=\; \big\{z \in \mathbb{C};\ (\mathrm{Im}\,(z) \neq 0) \text{ ou } (\mathrm{Im}\,(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}\,(z) > 0)\big\}\,.$$

On rappelle que le développement en série entière du logarithme principal en 1 est donné par, pour $w \in D(1;1)$,

$$\mathrm{Log}\,(w) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(w-1)^n\,.$$

Les fonctions cosinus et sinus sont notées cos et sin respectivement.

Exercice 1. : 7 pts.
On considère les séries entières données par, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$s \;:=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} \quad \text{et} \quad t \;:=\; \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}(z-i)^n}{n}\,.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R_1 de la série entière s.
   Soit $f_1 : D(0;R_1) \longrightarrow \mathbb{C}$ la somme de la série entière s.

2. Montrer que f_1 admet un prolongement analytique f à l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R_2 de la série entière t.
   Soit $g_1 : D(i;R_2) \longrightarrow \mathbb{C}$ la somme de la série entière t.

4. Montrer que g_1 admet un prolongement analytique g à l'ouvert

   $$\Omega \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \big(\mathrm{Im}\,(z) \neq 1\big) \text{ ou } \big(\mathrm{Im}\,(z) = 1 \text{ et } \mathrm{Re}\,(z) > -1\big)\big\}\,.$$

   (Indication : on pourra utiliser le logarithme principal Log).

5. Vérifier que $3(i-1)$ appartient aux domaines de définition de f et g. Calculer explicitement $f(3(i-1))$ et $g(3(i-1))$.

Exercice 2. : 5 pts.
Soit $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(z) = 2z^2 + iz + 1$.

1. Justifier le fait que h est de classe C^1 (au sens complexe).
2. Montrer que, pour $z = x + iy \in \mathcal{C}(0;1)$, $|h(z)|^2 = 2(-4y^2 + y + 5)$.
3. Déterminer le maximum de la fonction $[-1;1] \ni y \mapsto -4y^2 + y + 5$.
4. Montrer que
$$\sup_{z \in \overline{D}(0;1)} |h(z)| \;=\; |h(z_0)|\,,$$
pour un point $z_0 \in \overline{D}(0;1)$ que l'on précisera. On donnera aussi la valeur de $|h(z_0)|$.
5. Déterminer explicitement
$$\inf_{z \in \overline{D}(0;1)} |h(z)|\,.$$

Exercice 3. : 9 pts.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(0) = i$ et, pour $z \neq 0$, par
$$f(z) \;=\; \frac{\exp(iz) - 1}{z}\,.$$

1. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. La fonction f a-t-elle une primitive sur $\mathbb{C}$? Justifier toute réponse.
3. Soit $R > 0$ et $\gamma_R : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ le chemin de classe C^1 donné par : $\gamma_R(t) = R\exp(it)$. Montrer que
$$\left| \int_{\gamma_R} f(w)\,dw \;+\; i\pi \right| \;\leq\; \int_0^{\pi} e^{-R\sin(t)}\,dt\,. \tag{1}$$
4. Montrer que
$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^{\pi} e^{-R\sin(t)}\,dt \;=\; 0\,.$$
5. Pour $R > 0$, justifier l'existence de l'intégrale de Riemann
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{is} - 1}{s}\,ds\,.$$
6. Montrer que la limite
$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{is} - 1}{s}\,ds$$
existe et vaut $i\pi$.
(Indication : on pourra intégrer la fonction f le long d'un chemin fermé dont l'image contient le segment $[-R;R]$ et l'image de γ_R. On **ne justifiera pas** que la courbe choisie est bien un chemin fermé).

7. Montrer que la limite
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-is}-1}{s}\, ds$$
existe et vaut $-i\pi$.

8. En déduire que la limite
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(s)}{s}\, ds$$
existe et vaut π.

Exercice 4. : 3 pts.
Soit $g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
$$g(z) \;=\; \frac{\exp\left(z^2\right)}{z^2}\,.$$
La fonction g admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}^*$? Justifier toute réponse.

L3M, Analyse complexe.

Correction du contrôle continu du 6 novembre 2023.

Exercice 1, 7 pts :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(-1)^n} \right| = \frac{1}{2},$$
ce qui tend vers $1/2$ quand $n \to +\infty$. Par la règle de D'Alembert du cours, $R_1 = 2$. **1 pt.**

2. Pour $z \in D(0;2)$, on a $|-z/2| < 1$ donc, d'après les propriétés des séries géométriques,
$$\frac{2}{2+z} = \frac{1}{1-(-z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} = f_1(z).$$
La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ définie par $f(z) = 2/(2+z)$ est bien définie, est de classe C^1 comme quotient de polynômes et prolonge f_1, d'après la formule précédente. Par le cours, f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$. **1,5 pts.**

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\left| \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1} \frac{n}{(-1)^{n-1}} \right| = \frac{1}{1+(1/n)},$$
ce qui tend vers 1 quand $n \to +\infty$. Par la règle de D'Alembert du cours, $R_2 = 1$. **1 pt.**

4. D'après le DSE de Log en 1, on a, pour $|z-i| < 1$, $|(z+1-i)-1| < 1$ donc
$$\mathrm{Log}(z+1-i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-i)^n. \tag{2}$$
Pour $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\begin{aligned} & z+1-i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-) \\ \iff & \big(\big(\mathrm{Im}\,(z+1-i) \neq 0\big) \text{ ou } \big(\big(\mathrm{Im}\,(z+1-i) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}\,(z+1-i) > 0\big)\big) \\ \iff & \big(\big(\mathrm{Im}\,(z) \neq 1\big) \text{ ou } \big(\big(\mathrm{Im}\,(z) = 1 \text{ et } \mathrm{Re}\,(z) > -1\big)\big) \\ \iff & z \in \Omega. \end{aligned}$$
La fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(z) = \mathrm{Log}(z+1-i)$ est bien définie et de classe C^1 par composition. Elle est donc analytique, d'après le cours. De plus, elle prolonge g_1 d'après (2). **2 pts.**

5. On a $3(i-1) \neq -2$ et $\mathrm{Im}\,(3(i-1)) \neq 1$. Donc $3(i-1) \in (\mathbb{C} \setminus \{-2\})$ et $3(i-1) \in \Omega$. On a $f(3(i-1)) = -(1+3i)/5$. Comme $2(i-1) = 2\sqrt{2}\exp(i3\pi/4)$,

$$\begin{aligned} g\big(3(i-1)\big) &= \mathrm{Log}\big(2(i-1)\big) \;=\; \ln\big|2(i-1)\big| \,+\, i\,\mathrm{Arg}\big(2(i-1)\big) \\ &= \frac{3}{2}\,\ln(2) \,+\, i\frac{3\pi}{4}\,. \quad \textbf{1,5 pts.} \end{aligned}$$

Exercice 2, 5 pts :

1. D'après le cours, la fonction $\mathbb{C} \ni z \mapsto z$ est C^1 donc, par somme et produit, h est C^1. **1 pt.**

2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $h(z) = (2z-i)(z+i)$. Soit $z = x+iy \in \mathcal{C}(0;1)$. On a $x^2+y^2 = 1$ donc

$$\begin{aligned} |h(z)|^2 &= |2z-i|^2\,|z+i|^2 \;=\; \big(4x^2 \,+\, (2y-1)^2\big)\,\big(x^2 \,+\, (y+1)^2\big) \\ &= \big(4(1-y^2) \,+\, (2y-1)^2\big)\,\big(1-y^2 \,+\, (y+1)^2\big) \\ &= 2\,\big(5 \,-\, 4y\big)\,\big(1+y\big) \;=\; 2\,\big(5 \,+\, y \,-\, 4y^2\big)\,. \quad \textbf{1 pt.} \end{aligned}$$

3. La fonction $\varphi : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\varphi(y) = -4y^2+y+5$ est de classe C^1. Sa dérivée est donnée, pour $y \in [-1;1]$, par $\varphi'(y) = 1-8y$. La fonction φ est donc croissante sur $[-1;1/8]$ et décroissante sur $[1/8;1]$. La fonction φ est donc maximale en $1/8$ et y vaut $81/16 = (9/4)^2$. **0,5 pt.**

4. Comme h est C^1 sur $\mathbb{C}$, elle est C^1 sur $D(1;1)$ et continue sur $\mathbb{C}$, d'après le cours, donc aussi continue sur $\overline{D}(1;1)$. Par le principe du maximum, on a

$$\sup_{z\in\overline{D}(0;1)} |h(z)| \;=\; \sup_{z\in\mathcal{C}(0;1)} |h(z)| \;=\; \max_{z\in\mathcal{C}(0;1)} |h(z)|\,. \tag{3}$$

   Soit $z_0 = (\sqrt{15}+i)/8 \in \mathcal{C}(0;1) \subset \overline{D}(0;1)$. D'après 2 et 3, on a, pour $z \in \mathcal{C}(0;1)$, $|h(z)|^2 \leq 2\varphi(1/8) = |h(z_0)|^2 = 2(9/4)^2$. Comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante, on a, pour tout $z \in \mathcal{C}(0;1)$, $|h(z)| \leq \sqrt{2}(9/4) = |h(z_0)|$. D'après (3), la restriction de la fonction $|h|$ à $\overline{D}(0;1)$ admet un maximum en z_0, ce maximum valant $\sqrt{2}(9/4)$. **2 pts.**

5. Pour $z \in \overline{D}(0;1)$, on a $|h(z)| = |2z-i|\,|z+i| \geq 0 = |h(i/2)|$ avec $(i/2) \in \overline{D}(0;1)$. Donc la restriction de la fonction $|h|$ à $\overline{D}(0;1)$ admet un minimum en $i/2$, ce minimum valant 0. **0,5 pt.**

Exercice 3, 9 pts :

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a, comme la multiplication par $(1/z)$ est continue et celle par i aussi,

$$\frac{\exp(iz)-1}{z} \;=\; \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\,z^{n-1} \;=\; i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(iz)^{n-1}}{n!}\,. \tag{4}$$

En appliquant cette formule avec z remplacé par $|z|/i$, on voit que la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{i^{n-1}}{n!}\, z^{n-1} \;=\; \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{i^p}{(p+1)!}\, z^p$$

converge absolument pour tout $z \neq 0$. C'est aussi le cas pour $z = 0$. Son rayon de convergence est donc infini. Soit g sa somme. Elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, par le cours. On a $g(0) = i^0/(1!) = 1$. D'après (4), f coïncide avec ig sur $\mathbb{C}^*$ et comme $f(0) = i = ig(0)$, $f = ig$, qui est holomorphe par produit. **1,5 pts.**

2. Comme $\mathbb{C}$ est un ouvert étoilé et comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ par 1, elle admet une primitive sur $\mathbb{C}$, d'après un résultat du cours. **1,5 pts.**

3. Par les propriétés du cours de l'exponentielle, on a

$$\int_{\gamma_R} f(w)\,dw \;=\; \int_0^\pi \frac{\exp(Re^{it})-1}{Re^{it}}\, Rie^{it}\,dt \;=\; i\int_0^\pi e^{iR\cos(t)}\, e^{-R\sin(t)}\,dt \;-\; i\pi\,.$$

Donc

$$\left|\int_{\gamma_R} f(w)\,dw \,+\, i\pi\right| \;\leq\; \int_0^\pi \left|e^{iR\cos(t)}\, e^{-R\sin(t)}\right|\,dt \;=\; \int_0^\pi e^{-R\sin(t)}\,dt\,.$$

ce qui donne (1). **1 pt.**

4. Pour tout $t \in [0;\pi]$, $\sin(t) \geq 0$, par le cours. Donc $e^{-R\sin(t)} \leq 1$, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle. De plus, toujours par les propriétés du cours de sinus et de l'exponentielle réelle, on a, pour $t \in]0;\pi[$, $\sin(t) > 0$ donc

$$\lim_{R\to+\infty} e^{-R\sin(t)} \;=\; 0\,.$$

Comme la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0;\pi]$, on a, par convergence dominée,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^\pi e^{-R\sin(t)}\,dt \;=\; 0\,. \quad \textbf{1 pt.}$$

5. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est continue sur $\mathbb{C}$, par le cours. La fonction

$$\mathbb{R}^* \ni s \mapsto \frac{e^{is}-1}{s} \;=\; f(s)$$

se prolonge donc par continuité sur $\mathbb{R}$. Son intégrale sur $[-R;R]$ est donc bien définie. **0,5 pt.**

6. Soit $R > 0$. On considère le chemin fermé $\Gamma_R : [-1;\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\Gamma_R(t) = tR + (1+t)R$, si $t \in [-1;0[$ et par $\Gamma_R(t) = \gamma_R(t)$, si $t \in [0;\pi]$. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et comme $\mathbb{C}$ est étoilé, l'intégrale de f le long de Γ_R est nulle, d'après le cours. On a donc

$$0 \;=\; \int_{\Gamma_R} f(w)\,dw \;=\; \int_{-1}^0 \frac{e^{iR(1+2t)}-1}{R(1+2t)}\, 2R\,dt \;+\; \int_{\gamma_R} f(w)\,dw$$

et, par changement de variable $s = R(1+2t)$,

$$0 \;=\; \int_{-R}^{R} \frac{e^{is}-1}{s}\, ds \;+\; \int_{\gamma_R} f(w)\, dw\,. \tag{5}$$

D'après (1) et 4, on a, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(w)\, dw \;=\; -i\pi\,.$$

Par (5), on en déduit que la limite

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{is}-1}{s}\, ds$$

existe et vaut $i\pi$. **2 pts.**

7. Soit $R > 0$. On a, par changement de variable $u = -s$,

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{-is}-1}{s}\, ds \;=\; \int_{R}^{-R} \frac{e^{iu}-1}{-u}\,(-1)\, du \;=\; -\int_{-R}^{R} \frac{e^{iu}-1}{u}\, du\,.$$

D'après 6, on en déduit que la limite

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-is}-1}{s}\, ds$$

existe et vaut $-i\pi$. **0,5 pt.**

8. Soit $R > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{\sin(s)}{s}\, ds \;&=\; \int_{-R}^{R} \frac{e^{is}-e^{-is}}{2is}\, ds \;=\; \frac{1}{2i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{is}-1+1-e^{-is}}{s}\, ds \\ &=\; \frac{1}{2i}\left(\int_{-R}^{R} \frac{e^{is}-1}{s}\, ds \;+\; \int_{-R}^{R} \frac{e^{-is}-1}{s}\, ds\right)\end{aligned}$$

donc, d'après 6 et 7, on en déduit que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(s)}{s}\, ds$$

existe et vaut $(2i)^{-1}(i\pi - (-i\pi)) = \pi$. **1 pt.**

Exercice 4, 3 pts :
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Comme la multiplication par $(1/z)$ est continue, on a

$$g(z) \;=\; \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \;=\; \frac{1}{z^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}\right) \;=\; \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2(n-1)}}{n!}\,. \tag{6}$$

En appliquant cette formule avec z remplacé par $|z|$, on voit que la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^{2(n-1)}}{n!} \;=\; \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{z^{2p}}{(p+1)!}$$

converge absolument pour tout $z \neq 0$. C'est aussi le cas pour $z = 0$. Son rayon de convergence est donc infini. Soit g_1 sa somme. Elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, par le cours. D'après (6), on a, pour $z \neq 0$, $g(z) = (1/z^2) + g_1(z)$.
Comme $\mathbb{C}$ est étoilé, g_1 admet une primitive G_1 sur $\mathbb{C}$, d'après le cours. Soit $G : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $G(z) = -(1/z) + G_1(z)$. Comme $\mathbb{C} \ni z \mapsto z$ est holomorphe d'après le cours, $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/z$ l'est par quotient. Donc, par somme, G est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. De plus, pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$G'(z) \;=\; -\frac{-1}{z^2} \,+\, G_1'(z) \;=\; \frac{1}{z^2} \,+\, g_1(x) \;=\; g(z)\,.$$

La fonction G est donc une primitive de g sur $\mathbb{C}^*$.