L3M, Analyse complexe.

Contrôle continu du 15 octobre 2024, **60 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. Elle comprend 2 exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés.
Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée.

Notations : On désigne par $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp et, pour $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $e^z := \exp(z)$.

Exercice 1. : 7 pts.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x; y) = iy^3 - x$. On pose $P = \mathrm{Re}\, f$ et $Q = \mathrm{Im}\, f$.

1. Montrer que P et Q sont C^1.
2. Montrer qu'il n'existe aucun ouvert non vide sur lequel f est holomorphe.
3. Trouver une fonction $Q_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g := f + iQ_0$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$. On justifiera toute réponse et on notera $\tilde{P} = \mathrm{Re}\, g$ et $\tilde{Q} = \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 2. : 14 pts.
Pour $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$, on note par $\psi_{z_1;z_2}$ le chemin de classe C^1 donné par $[0; 1] \ni t \mapsto tz_2 + (1-t)z_1$, dont l'image est le segment $[z_1; z_2]$.
Soit $f : D(0; 1[\longrightarrow \mathbb{C}$ et $F : D(0; 1[\longrightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$f(z) \;=\; \frac{1}{1-z} \quad \text{et} \quad F(z) \;=\; \int_{\psi_{0;z}} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

La fonction F est bien définie car, comme le disque $D(0; 1[$ est convexe, l'image de $\psi_{0;z}$ est, pour tout $z \in D(0; 1[$, incluse dans $D(0; 1[$.

1. Soit $(z; h) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$h \;=\; \int_{\psi_{z;z+h}} 1\,\mathrm{d}w \quad \text{et} \quad |h| \;=\; L\big(\psi_{z;z+h}\big)\,,$$

   où $L(\psi_{z;z+h})$ désigne la longueur du chemin $\psi_{z;z+h}$.

2. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a; b] \longrightarrow D(0; 1[$ un chemin fermé. On sait, par le cours, qu'il existe $\rho \in]0; 1[$ tel que $\gamma([a; b]) \subset D(0; \rho] \subset D(0; 1[$.

a). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t\in[a;b]} |\gamma(t)^n| \;\leq\; \rho^n \,.$$

b). Montrer que

$$\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; 0\,.$$

(Indication : on pourra utiliser une série géométrique.)

3. Soit $z \in D(0;1[$. On sait, par le cours, qu'il existe $r > 0$ tel que $D(z;r[\subset D(0;1[$ et qu'en particulier, $r + |z| < 1$.

a). Soit $h \in \mathbb{C}$ avec $|h| < r$. Montrer que

$$F(z+h) \;-\; F(z) \;-\; h\,f(z) \;=\; \int_{\psi_{z;z+h}} \big(f(w) \;-\; f(z)\big)\,\mathrm{d}w\,. \tag{1}$$

b). Montrer que, pour $w \in [z; z+h]$,

$$|f(w)| \;\leq\; \frac{1}{1 \;-\; r \;-\; |z|}\,.$$

On appelle C le membre de droite de cette inégalité.

c). Montrer que F est holomorphe en z de nombre $\mathbb{C}$-dérivé $f(z)$.

4. On considère le chemin de classe C^1 $\Gamma : [0;\pi] \ni t \mapsto e^{it}/2$, dont l'image est incluse dans $D(0;1[$. Montrer que

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}w}{1 \;-\; w} \;=\; \ln(3)\,, \tag{2}$$

où ln est le logarithme népérien.

L3M, Analyse complexe.

Correction du contrôle continu du 15 octobre 2024.

Exercice 1, 7 pts :

1. Les fonctions P et Q sont polynômiales en les variables x et y donc sont de classe C^1. De plus, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial P}{\partial x}(x;y) \;=\; -1\,, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x;y) \;=\; 0\,,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x;y) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x;y) \;=\; 3y^2\,.$$
1 pt.

2. Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $3y^2 \geq 0 > -1$ donc
$$\frac{\partial P}{\partial x}(x;y) \;\neq\; \frac{\partial Q}{\partial y}(x;y)\,.$$
L'une des conditions de Cauchy-Riemann n'est jamais remplie sur $\mathbb{R}^2$ donc f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$, par le cours. Il n'existe donc aucun ouvert non vide sur lequel f est holomorphe.
2,5 pts.

3. Deux versions.
Version 1. Soit $Q_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On a $\tilde{P} = P$ et $\tilde{Q} = Q + Q_0$. D'après 1, $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ sont C^1 et, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}(x;y) \;=\; -1\,, \quad \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x;y) \;=\; 0\,,$$
$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x;y) \;=\; \frac{\partial Q_0}{\partial x}(x;y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}(x;y) \;=\; 3y^2 \,+\, \frac{\partial Q_0}{\partial y}(x;y)\,.$$
Si, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial Q_0}{\partial x}(x;y) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q_0}{\partial y}(x;y) \;=\; -3y^2 \,-\, 1 \tag{3}$$
alors les conditions de Cauchy-Riemann pour g sont partout satisfaites et, par le cours, g est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
À cause de la première condition dans (3), on choisit Q_0 indépendante de x et on primitive la seconde condition pour poser : pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, soit $Q_0(x;y) = -y^3 - y$. Q_0 est une fonction polynôme donc est de classe C^1. De plus, (3) est partout vérifiée.

Version 2. Soit $Q_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $Q_0(x;y) = -y^3 - y$. Pour $z = (x;y) \in \mathbb{C}$, on a

$$g(z) \;=\; f(z) \,+\, iQ_0(x;y) \;=\; iy^3 \,-\, x \,-\, iy^3 \,-\, iy \;=\; -(x+iy) \;=\; -z\,.$$

Par le cours, $z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc, par produit, g est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
3,5 pts.

Exercice 2, 14 pts :
1. Pour tout $t \in [0;1]$, on a $\psi'_{z;z+h}(t) = z + h - z = h$. Par définition, on a

$$\int_{\psi_{z;z+h}} 1\,\mathrm{d}w \;=\; \int_0^1 1\,\psi'_{z;z+h}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 h\,\mathrm{d}t \;=\; h\,.$$

Par le cours,

$$L\big(\psi_{z;z+h}\big) \;=\; \int_0^1 \big|\psi'_{z;z+h}(t)\big|\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 |h|\,\mathrm{d}t \;=\; |h|\,.$$

2 pts.
2. a). Pour tout $t \in [a;b]$, $|\gamma(t)| \leq \rho$ car $\gamma([a;b]) \subset D(0;\rho]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc, pour tout $t \in [a;b]$, $|\gamma(t)^n| = |\gamma(t)|^n \leq \rho^n$ donc

$$\sup_{t\in[a;b]} |\gamma(t)^n| \;\leq\; \rho^n\,.$$

1 pt.
2. b). Par le cours, γ est la concaténation de chemins de classe C^1 $\gamma_k : [t_{k-1};t_k] \longrightarrow D(0;\rho]$, pour $1 \leq k \leq p$, et

$$\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{k=1}^{p} \int_{\gamma_k} f(w)\,\mathrm{d}w\,. \tag{4}$$

Pour tout k, γ'_k est continue sur le compact $[t_{k-1};t_k]$ donc bornée. Il existe $M > 0$ tel que, pour tout k, $\sup|\gamma'_k| \leq M$. Soit $1 \leq k \leq p$. Pour $t \in [t_{k-1};t_k]$, $\gamma(t) = \gamma_k(t)$. D'après 2. a), on a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \sup_{t\in[t_{k-1};t_k]} |\gamma_k(t)^n|\,|\gamma'_k(t)| \;\leq\; M\sum_{n=0}^{N} \rho^n\,,$$

qui est la somme partielle d'une série géométrique convergente, puisque $0 \leq \rho < 1$. Donc $\sum_n \gamma_k(t)^n\gamma'_k(t)$ converge normalement sur $[t_{k-1};t_k]$. D'après les propriétés des séries géométriques, on a, pour tout $w \in D(0;1[$,

$$f(w) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,.$$

Par le cours, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_k} f(w)\,\mathrm{d}w \;&=\; \int_{\gamma_k} \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,\mathrm{d}w \;=\; \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_k(t)^n\,\gamma_k'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma_k(t)^n\,\gamma_k'(t)\,\mathrm{d}t \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_k} w^n\,\mathrm{d}w\,.\end{aligned}$$

D'après (4) et des propriétés du cours, on a donc

$$\int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} \int_{\gamma_k} w^n\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} w^n\,\mathrm{d}w \;=\; 0\,,$$

puisque γ est fermé et, pour tout n, $w \mapsto w^n$ a une primitive sur $\mathbb{C}$ (cf. cours).
4 pts.
3. a). Soit γ la concaténation des chemins C^1 $\psi_{0;z}$, $\psi_{z;z+h}$ et $\psi_{z+h;0}$. C'est un chemin fermé donc, par 2. b) et les propriétés des intégrales,

$$\begin{aligned}0 \;&=\; \int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; F(z) \;+\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \;+\; \int_{\psi_{z+h;0}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &= F(z) \;+\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \;-\; \int_{\psi_{0;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &= F(z) \;+\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \;-\; F(z+h)\,,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$F(z+h) \;-\; F(z) \;=\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

D'après 1. et les propriétés des intégrales,

$$\begin{aligned}F(z+h) \;-\; F(z) \;-\; hf(z) \;&=\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \;-\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(z)\,\mathrm{d}w \\ &=\; \int_{\psi_{z;z+h}} \big(f(w) \;-\; f(z)\big)\,\mathrm{d}w\,.\end{aligned}$$

1,5 pts.
3. b). Comme $|h| < r$, $|z+h| \leq |z| + |h| < |z| + r$ donc $z+h \in D(0;|z|+r[$. Comme $|z| < |z|+r$, $z \in D(0;|z|+r[$ et comme $D(0;|z|+r[$ est convexe, $[z;z+h] \subset D(0;|z|+r[$. Pour $w \in D(0;|z|+r[$, on a $1 \leq |1-w|+|w| \leq |1-w|+|z|+r$ donc $|1-w| \geq 1-|z|-r > 0$ d'où

$$|f(w)| \;=\; \frac{1}{|1-w|} \;\leq\; \frac{1}{1-|z|-r}\,.$$

Comme $[z;z+h] \subset D(0;|z|+r[$, cette majoration est valable pour $w \in [z;z+h]$.
1 pt.

3. c). On note par $G(h)$ le membre de gauche de (1). On utilise (1), le cours sur les intégrales et 1. pour obtenir

$$|G(h)| \;\leq\; L\big(\psi_{z;z+h}\big) \sup_{w\in[z;z+h]} \big|f(w) - f(z)\big| \;=\; |h| \sup_{w\in[z;z+h]} \big|f(w) - f(z)\big| \,.$$

Pour $w \in [z; z+h]$, on a, d'après 3. b),

$$\big|f(w) - f(z)\big| \;=\; \left|\frac{w - z}{(1 - w)\,(1 - z)}\right| \;\leq\; \frac{C\,|h|}{|1 - z|}$$

donc, en reportant dans l'inégalité précédente, on obtient $|G(h)| = O(|h|^2) = o(|h|)$. Par le cours, F est holomorphe en z de nombre $\mathbb{C}$-dérivé $f(z)$.
2,5 pts.
4. Soit γ la concaténation de Γ et de $\psi_{-1/2;1/2}$. C'est un chemin fermé. Par 2. b) et les propriétés sur les intégrales,

$$0 \;=\; \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_\Gamma f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\psi_{-1/2;1/2}} f(w)\,\mathrm{d}w\,. \tag{5}$$

Par définition,

$$\int_{\psi_{-1/2;1/2}} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1 - (-t/2 + (1-t)/2)}\,(-1)\,\mathrm{d}t \;=\; -\int_0^1 \frac{1}{1/2 + t}\,\mathrm{d}t$$
$$= - \,\big[\ln(1/2 + \cdot)\big]_0^1 \;=\; -\ln(3/2) + \ln(1/2) \;=\; -\ln 3\,.$$

Par (5), on obtient (2).
2 pts.