L3M, Analyse complexe.

Contrôle continu du 13 novembre 2024, **60 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. Elle comprend **3** exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés.
Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée.

Notations : On désigne par $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp et, pour $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $e^z := \exp(z)$. La fonction sinus est notée sin.

On pourra utiliser sans justification les faits suivants :
F1 : $\pi > 1$.
F2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\lim_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x} \; = \; 0 \, .$$

Exercice 1. : 4 pts.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières
$$s_1 \; := \; \sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{\sqrt{n}} z^n \quad \text{et} \quad s_2 \; := \; \sum_{n \geq 0} z^{5n} \, .$$
On notera le premier R_1 et le second R_2.

Exercice 2. : 5 pts.
Soit $f : D(0;1[\longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et, pour $z \neq 0$, par
$$f(z) \; = \; \frac{z^2}{\sin(z)} \, .$$

1. Montrer que la fonction sinus ne s'annule pas sur $D(0;1[\setminus\{0\}$.
2. Montrer que la fonction f est holomorphe.

Exercice 3. : 11 pts.
Soit $\theta \in]\pi/2; 3\pi/2[$. Pour $R > 0$, on considère les chemins de classe C^1 donnés par
$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : [-R;0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \, , \\ t & \mapsto & t \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \gamma_2 : [0;R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & te^{i\theta} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \gamma_3 : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -tR + (1-t)Re^{i\theta} \, . \end{array}$$
On considère la fonction holomorphe (donc continue) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z\exp(z)$.
On **ne justifiera pas** la validité des éventuelles concaténations utilisées.

1. Montrer que f admet une primitive sur $\mathbb{C}$.
2. Soit $R > 0$. Montrer que

$$\int_{\gamma_1} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; (R+1)\,e^{-R} \,-\, 1\,. \tag{1}$$

3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall\, R > 0\,, \quad \left|\int_{\gamma_3} f(w)\,\mathrm{d}w\right| \;\leq\; C\,R^2\,e^{R\cos(\theta)}\,. \tag{2}$$

4. Montrer que

$$\int_{\gamma_1} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\gamma_2} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\gamma_3} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; 0\,. \tag{3}$$

5. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(w)\,\mathrm{d}w\,. \tag{4}$$

L3M, Analyse complexe.

Correction du contrôle continu du 13 novembre 2024.

Exercice 1, 4 pts : Pour $n \geq 1$, on a

$$\left| \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{3^n} \right| \;=\; \frac{3}{\sqrt{1\,+\,1/n}} \;\to\; 3$$

quand $n \to \infty$. Par la règle de D'Alembert, $R_1 = 1/3$.
1,5 pts.
Pour $z \in \mathbb{C}$, s_2 est une série géométrique de raison z^5. Elle converge donc pour $|z^5| = |z|^5 < 1$ donc pour $|z| < 1$. Pour tout $|z| < 1$, $R_2 \geq |z|$, par le cours, donc $R_2 \geq 1$. La série géométrique de raison z^5 diverge grossièrement pour $|z^5| = |z|^5 > 1$ donc pour $|z| > 1$. Pour tout $|z| > 1$, $R_2 \leq |z|$, par le cours, donc $R_2 \leq 1$. D'où $R_2 = 1$.
2,5 pts.

Exercice 2, 5 pts :

1. Soit $z \in D(0;1[$ tel que $\sin(z) = 0$. Alors, par définition de sinus et les propriétés de l'exponentielle, $e^{iz} - e^{-iz} = 0$ donc $e^{iz}(e^{iz} - e^{-iz}) = 0$ et $e^{2iz} = 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2z = 2k\pi$ soit $z = k\pi$. Comme $|z| < 1$ et $\pi > 1$ (cf. F1), $k = 0$ et $z = 0$. Donc sin ne s'annule pas sur $D(0;1[\setminus\{0\}$.
   2 pts.
2. **Version 1** : Par le cours, sin est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc sur $D(0;1[$. Par 1, sin ne s'annule pas sur $D(0;1[\setminus\{0\}$ donc par quotient $1/\sin$ est holomorphe sur $D(0;1[\setminus\{0\}$. Comme $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^2$ est holomorphe (cf. cours), f est holomorphe sur $D(0;1[\setminus\{0\}$, par produit. Il reste à montrer que f est holomorphe en 0.
   Soit $z \in (D(0;1[\setminus\{0\}$. On a

   $$\frac{f(z)\;-\;f(0)}{z} \;=\; z\,\frac{z}{\sin(z)} \;=\; \frac{z}{\frac{\sin(z)}{z}}\,.$$

   Comme sin est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 de $\mathbb{C}$-dérivée $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$,

   $$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} \;=1 \;\neq\; 0$$

   et, comme $\lim_{z\to 0} z = 0$, on a, par quotient,

   $$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)\;-\;f(0)}{z} \;=\; 0\,.$$

   Donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 de $\mathbb{C}$-dérivée 0.
   Version 2 : Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a, par le cours et un résultat de L1 sur les suites complexes,

   $$\frac{\sin(z)}{z} \;=\; \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,z^{2n+1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,z^{2n}\,.$$

En particulier, la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n}$$

converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc son rayon de convergence est infini, par le cours. Soit g sa somme, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$, par le cours. Pour $z \neq 0$, $g(z) = \sin(z)/z$. D'après 1, g ne s'annule pas sur $D(0;1[\setminus\{0\}$ et, comme $g(0) = (-1)^0/(1!) = 1$, g ne s'annule pas sur $D(0;1[$. De plus, pour tout $z \in D(0;1[$, $f(z) = z/g(z)$. Comme $z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc sur $D(0;1[$ (cf. cours), f est holomorphe par quotient.
3 pts.

Exercice 3, 11 pts :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition de exp et une propriété de L1 sur les suites complexes, on a
$$f(z) \;=\; z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}\,.$$
f est donc la somme d'une série entière s dont le rayon de convergence est infini, puisque la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ (cf. cours). Par le cours, la série entière
$$s_1 \;:=\; \sum_{n\geq 0} \frac{z^{n+2}}{(n!)\,(n+2)}$$
a le même rayon de convergence que sa série dérivée qui est s. La rayon de convergence de s_1 est donc infini et, par le cours, sa somme est une fonction holomorphe dont la $\mathbb{C}$-dérivée est la somme de s, c'est-à-dire f. Donc f admet une primitive sur $\mathbb{C}$.
3 pts.
2. Par définition et par intégration par parties, on a
$$\int_{\gamma_1} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_{-R}^{0} t\,e^t\,dt \;=\; \big[t\,e^t\big]_{-R}^{0} - \int_{-R}^{0} e^t\,dt \;=\; \big[t\,e^t\big]_{-R}^{0} \;-\; \big[e^t\big]_{-R}^{0}$$
$$= R\,e^{-R} \;-\; 1 \;+\; e^{-R} \;=\; (R\,+\,1)\,e^{-R} \;-\; 1\,.$$
1,5 pts.
3. Soit $R > 0$. Pour $t \in [0;1]$, on a
$$\big|f\big(\gamma_3(t)\big)\big| \;=\; \big|\gamma_3(t)\big|\,e^{\mathrm{Re}\,(\gamma_3(t))} \;\leq\; 2R\,e^{R\cos(\theta)}$$
car $\mathrm{Re}\,(\gamma_3(t)) - R\cos(\theta) = -tR(1+\cos(\theta)) \leq 0$. De plus, $|\gamma_3'(t)| = R|-1-e^{i\theta}| \leq 2R$. Donc
$$\left|\int_{\gamma_3} f(w)\,\mathrm{d}w\right| \;=\; \left|\int_0^1 f\big(\gamma_3(t)\big)\,\gamma_3'(t)\,\mathrm{d}w\right| \;\leq\; \int_0^1 \big|f\big(\gamma_3(t)\big)\big|\,|\gamma_3'(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leq 4\,R^2\,e^{R\cos(\theta)} \int_0^1 \mathrm{d}t \;=\; 4R^2\,e^{R\cos(\theta)}\,.$$
2 pts.

4. Soit $\gamma\,:\,[a;b]\longrightarrow\mathbb{C}$ la concaténation des chemins γ_1, γ_2 et γ_3, dans cet ordre. Comme $\gamma(a)=\gamma_1(-R)=-R=\gamma_3(1)=\gamma(b)$, γ est fermé. Comme f admet une primitive sur $\mathbb{C}$ (cf. 1), on a, par le cours,

$$0 \;=\; \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_{\gamma_1} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\gamma_2} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\gamma_3} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

2,5 pts.

5. Pour $R>0$, on a, en utilisant le fait que $\cos(\theta)\neq 0$,

$$(R+1)\,e^{-R} \;=\; e\,(R+1)\,e^{-(R+1)},\, 4R^2\,e^{R\cos(\theta)} \;=\; \frac{4}{\cos^2(\theta)}\,\big(-R\cos(\theta)\big)^2\,e^{-(-R\cos(\theta))}.$$

D'après F2 et le fait que $\cos(\theta)<0$, on déduit des égalités précédentes que le membre de droite de (1) tend vers -1 tandis que le membre de droite de (2) tend vers 0 et, par le théorème des gendarmes et (2), que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_3} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; 0\,.$$

D'après (3), on a l'existence de la limite (4) et sa valeur :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; 1\,.$$

2 pts.