

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. Elle comprend **3** exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés.

Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée.

On pourra utiliser sans justification les faits suivants :

F1 : $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. F2 : $\cos(2\pi/3) = -(1/2)$ et $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Exercice 1. : 6 pts.

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes : 7 , -7 , $1 + i$ et $1 - i$.
2. Justifier l'existence et déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes

$$\operatorname{Log}(7), \operatorname{Log}(1 + i), \operatorname{Log}(1 - i), \operatorname{Log}_0(1 - i) \text{ et } \operatorname{Log}_{\pi/2}(-7).$$

On ne justifiera pas les calculs d'argument.

Exercice 2. : 9 pts.

Soit $j := \exp(2i\pi/3)$ et T le triangle plein $T(1; j; j^2)$. On rappelle que le bord ∂T de T est la réunion des segments $[1; j]$, $[j; j^2]$ et $[1; j^2]$. On note par $\overset{\circ}{T}$ l'intérieur de T . On **admet** que $\overline{\overset{\circ}{T}} = \overline{T} = T$ et que le bord $\partial \overset{\circ}{T}$ de $\overset{\circ}{T}$ est ∂T . Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $m_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $m_a(z) = az$.

1. Vérifier que $j^2 = \bar{j}$.
2. Montrer que la borne supérieure du module sur le segment $[j; j^2]$

$$\sup_{[j; j^2]} |\cdot| := \sup_{z \in [j; j^2]} |z|$$

est atteinte en j et j^2 .

3. Montrer que $m_{j^2}([j; j^2]) = [1; j]$ et $m_j([j; j^2]) = [1; j^2]$.
4. Montrer que la borne supérieure du module sur T , notée $\sup_T |\cdot|$, vérifie

$$\sup_T |\cdot| = \sup_{[j; j^2]} |\cdot|.$$

(Indication : on pourra appliquer le principe du maximum à une fonction adéquate.)

5. En déduire que $T \subset D(0; 1]$.

TOURNER SVP.

Exercice 3. : 5 pts.

Soit $f : D(0; 1[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique telle que $f(0) = f'(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

On rappelle que, pour tous $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r_0 > 0$, $\gamma_{z_0; r_0} : [0; 2\pi] \rightarrow C(z_0; r_0)$ est le chemin C^1 défini par $\gamma_{z_0; r_0}(t) = z_0 + r_0 e^{it}$.

1. Montrer qu'il existe $r \in]0; 1[$ et une fonction analytique $g : D(0; r[\rightarrow \mathbb{C}^*$ tels que $g'(0) = 0$ et, pour tout $z \in D(0; r[$, $f(z) = z^2 g(z)$.
2. Montrer qu'il existe $r_1 \in]0; r[$ tel que, pour tout $r' \in]0; r_1[$, l'intégrale

$$I := \int_{\gamma_{0; r'}} \frac{dw}{f(w)}$$

est bien définie et vaut 0.

(Indication : on pourra utiliser le DSE de $1/g$ en 0.)

Exercice 1, 6 pts :

1. On a, en utilisant F1 et les propriétés de exp,

$$7 = 7 \exp(i0), \quad -7 = 7 \exp(i\pi), \quad 1 + i = \sqrt{2} \exp(i\pi/4)$$

$$\text{et } 1 - i = \overline{1 + i} = \sqrt{2} \exp(-i\pi/4).$$

1 pt.

2. Les nombres 7 , $1 + i$ et $1 - i$ n'appartiennent pas à \mathbb{R}^- donc $\text{Log}(7)$, $\text{Log}(1 + i)$ et $\text{Log}(1 - i)$ sont bien définis. Par définition de Log , on a

$$\text{Log}(7) = \ln(7) + i \text{Arg}(7) = \ln(7) + 0 = \ln(7),$$

$$\text{Log}(1 + i) = \ln(\sqrt{2}) + i \text{Arg}(1 + i) = \ln(\sqrt{2}) + i \frac{\pi}{4}$$

$$\text{et } \text{Log}(1 - i) = \ln(\sqrt{2}) + i \text{Arg}(1 - i) = \ln(\sqrt{2}) - i \frac{\pi}{4}.$$

Comme $(1 - i) \notin \mathbb{R}^+$, $\text{Log}_0(1 - i)$ est bien défini et, par définition de Log_0 ,

$$\text{Log}_0(1 - i) = \ln(\sqrt{2}) + i \text{Arg}_0(1 - i) = \ln(\sqrt{2}) + i(2\pi - \pi/4) = \ln(\sqrt{2}) + i \frac{7\pi}{4}.$$

Comme $-7 = 7 \exp(i\pi)$ et $\pi - (\pi/2) \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\pi/2$ n'est pas un argument de -7 , par le cours. Donc $-7 \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ e^{i\pi/2})$ et $\text{Log}_{\pi/2}(-7)$ est bien défini. De plus

$$\text{Log}_{\pi/2}(-7) = \ln(7) + i \text{Arg}_{\pi/2}(-7) = \ln(7) + i\pi.$$

5 pts.

Exercice 2, 9 pts :

1. Par les propriétés de l'exponentielle, $j^3 = \exp(3 \cdot 2\pi/3) = \exp(2\pi) = 1$ et $1 = |j|^2$. Donc $j^3 = j\bar{j}$ et, en simplifiant par $j \neq 0$, $j^2 = \bar{j}$.

1 pt.

2. **Version 1 :** Pour $z \in [j; j^2]$, il existe $t \in [0; 1]$ tel que $z = tj^2 + (1 - t)j$. On a donc, d'après 1 et le fait que $t \in [0; 1]$,

$$|z| \leq |tj^2| + |(1 - t)j| = t|j^2| + (1 - t)|j| = 1 = |j| = |j^2|.$$

Donc $|\cdot|$ est maximal sur $[j; j^2]$ en j et j^2 et la valeur maximale est 1.

Version 2 : Pour $z \in [j; j^2]$, il existe $t \in [0; 1]$ tel que $z = tj^2 + (1 - t)j$. D'après 1, on a donc $z = t\bar{j} + (1 - t)j = \text{Re}(j) + i\text{Im}(j)(1 - 2t) = (-1/2) + i(\sqrt{3}/2)(1 - 2t)$. Comme $-1 \leq 1 - 2t \leq 1$, on a $(1 - 2t)^2 \leq 1$ donc

$$|z| = \sqrt{1/4 + (3/4)(1 - 2t)^2} \leq \sqrt{1/4 + (3/4)} = 1 = |j| = |j^2|.$$

Donc $|\cdot|$ est maximal sur $[j; j^2]$ en j et j^2 et la valeur maximale est 1.

1 pt.

3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} z \in m_a([j; j^2]) &\iff \exists t \in [0; 1]; z = a(tj^2 + (1-t)j) \\ &\iff \exists t \in [0; 1]; z = t(aj^2) + (1-t)(aj) \iff z \in [aj; aj^2]. \end{aligned}$$

En appliquant cela pour $a = j$ et $a = j^2$, on obtient $m_{j^2}([j; j^2]) = [j^3; j^4] = [1; j]$ et $m_j([j; j^2]) = [j^2; j^3] = [1; j^2]$, car $j^3 = 1$.

2 pts.

4. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z$. C'est un polynôme donc f est analytique et donc continue sur \mathbb{C} . En particulier, f est C_h^1 sur $\overset{\circ}{T}$ et continue sur $T = \overline{\overset{\circ}{T}}$. Par le principe du maximum appliqué à f sur T ,

$$\sup_{z \in T} |z| = \sup_{z \in \partial T} |z| = \max_{z \in \partial T} |z| \quad (1)$$

avec $\partial T = [1; j] \cup [j; j^2] \cup [1; j^2]$.

Soit $z \in [1; j]$. D'après 3, il existe $w \in [j; j^2]$ tel que $z = j^2 w$ donc $|z| = |j^2| |w| = |w| \leq \max_{[j; j^2]} |\cdot|$.

Soit $z \in [1; j^2]$. D'après 3, il existe $w \in [j; j^2]$ tel que $z = jw$ donc $|z| = |j| |w| = |w| \leq \max_{[j; j^2]} |\cdot|$.

D'où $\max_{\partial T} |\cdot| = \max_{[j; j^2]} |\cdot|$. D'après (1),

$$\sup_{z \in T} |z| = \max_{z \in [j; j^2]} |z| = \sup_{z \in [j; j^2]} |z|.$$

4 pts.

5. D'après 2 et 4, $\sup_T |\cdot| = \max_{[j; j^2]} |\cdot| = |j| = 1$. Pour tout $z \in T$, on a donc $|z| \leq 1$ c'est-à-dire $z \in D(0; 1]$. On a montré que $T \subset D(0; 1]$.

1 pt.

Exercice 3, 5 pts :

1. **Version 1 :** Comme f est analytique dans $D(0; 1[$, elle admet un DSE en 0. Il existe donc $R \in]0; 1]$ tel que, pour tout $z \in D(0; R[$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \frac{f''(0)}{2} z^2 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \\ &= z^2 \left(\frac{f''(0)}{2} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-2} \right) = z^2 \left(\frac{f''(0)}{2} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{f^{(p+2)}(0)}{(p+2)!} z^p \right). \end{aligned}$$

Soit g_0 la somme de la série entière

$$\frac{f''(0)}{2} + \sum_{p \geq 2} \frac{f^{(p+2)}(0)}{(p+2)!} z^p.$$

On a donc, sur $D(0; R[$, $f(z) = z^2 g_0(z)$, le rayon de convergence de cette série entière est au moins R et g_0 est analytique sur $D(0; R[$ (cf. cours). De plus, $g_0'(0)/(1!$

est le coefficient de z dans cette série entière donc est nul.

Comme g_0 est continue et $g_0(0) = f''(0)/2 \neq 0$, il existe $r \in]0; R]$ tel que $g_0(D(0; r]) \subset D(g_0(0); |g_0(0)|/2) \subset \mathbb{C}^*$. Soit g la restriction de g_0 à $D(0; r[$. Elle vérifie les propriétés requises.

Version 2 : D'après les hypothèses sur f , 0 est un zéro d'ordre 2 de f . Comme f est analytique sur l'ouvert connexe par arcs $D(0; 1[$ et est non nulle (puisque $f'''(0) \neq 0$), il existe, d'après la preuve du théorème des zéros isolés du cours, un $r \in]0; 1]$ et une fonction $g : D(0; r[\rightarrow \mathbb{C}^*$ analytique tels que, pour $z \in D(0; r[$, $f(z) = z^2 g(z)$. Pour $z \in D(0; r[$, on a

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2z g(z) + z^2 g'(z), & f''(z) &= 2g(z) + 4z g'(z) + z^2 g''(z), \\ f^{(3)}(z) &= 6g'(z) + 6z g''(z) + z^2 g^{(3)}(z). \end{aligned}$$

Donc $g'(0) = f^{(3)}(0)/6 = 0$.

2 pts.

2. Comme g ne s'annule pas sur $D(0; r[$, f ne s'annule pas sur $D(0; r[\setminus \{0\}$, par 1. En particulier, pour tout $r' \in]0; r[$, f ne s'annule pas sur $C(0; r')$. Donc $1/f$ y est continue et l'intégrale I est bien définie.

Comme g est analytique et ne s'annule pas sur $D(0; r[$, $1/g$ est analytique, par le cours. Elle admet donc un DSE en 0. Il existe donc $r_1 \in]0; r[$ tel que, pour tout $z \in D(0; r_1[$,

$$(1/g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/g)^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{g(0)} + \sum_{n=2}^{\infty} (1/g)^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!},$$

car, par 1, $g'(0) = 0$ et

$$(1/g)'(z) = -\frac{g'(z)}{g(z)^2} \quad \text{donc} \quad (1/g)'(0) = 0.$$

Par 1, $1/f$ est, sur $D(0; r[\setminus \{0\}$, la somme de la série de fonctions

$$s := \frac{1}{g(0)z^2} + \sum_{n \geq 2} (1/g)^{(n)}(0) \frac{1}{z^2} \frac{z^n}{n!}$$

Soit $r' \in]0; r_1[$. On a

$$\sup_{z \in C(0; r')} \left| \frac{1}{z^2} (1/g)^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{(r')^2} \sup_{z \in C(0; r')} \left| (1/g)^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} \right|.$$

Par le cours, le DSE de $(1/g)$ converge normalement sur $C(0; r')$. Donc la série s converge uniformément vers $1/f$ sur $C(0; r)$. Par le cours, on a donc

$$I = \frac{1}{g(0)} \int_{\gamma_{0; r'}} \frac{dz}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (1/g)^{(n)}(0) \frac{1}{n!} \int_{\gamma_{0; r'}} z^{n-2} dz.$$

Comme $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto -1/z$ est une primitive de $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/z^2$, comme, pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^{n-1}/(n-1)$ est une primitive de $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^{n-2}$, comme le chemin $\gamma_{0; r'}$ est fermé, les intégrales de la dernière égalité sont toutes nulles, par le cours. D'où $I = 0$.

3 pts.