L3M, Analyse complexe.

Contrôle continu du 7 octobre 2025, **45 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac. Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. Elle comprend des questions de cours et deux exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée.**

Notations : On désigne par $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(z)$) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z. La fonction exponentielle complexe est notée exp et, pour $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $e^z := \exp(z)$.

Exercice 1. : 5 pts. Questions de cours.

1. Soit $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que L soit $\mathbb{C}-$linéaire.
2. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f'(i) = 2-5i$. Donner la matrice jacobienne de f au point $(0;1) \in \mathbb{C}$.
3. Compléter l'énoncé suivant pour en faire un résultat du cours : pour $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$, on a
$$\mathrm{Arg}(z) \;=\; 2\mathrm{Arctan}\Big(\rule{3cm}{0.4pt}\Big)\,.$$

Exercice 2. : 7 pts.
Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions définies par

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z\,+\,1} \quad \text{et} \quad g(x;y) \;=\; x^5y^4 \,+\, ixy^3\,,$$

respectivement.

1. Montrer que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et vérifier explicitement qu'elle y satisfait les conditions de Cauchy–Riemann.
2. Déterminer l'ensemble Ω sur lequel g est holomorphe.

Exercice 3. : 9 pts.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \exp(-z^2)$. Pour $R \geq 1$, soit Γ_R la concaténation de $\varphi_R : [0; R] \ni t \mapsto t$, de $\gamma_R : [0; \pi/4] \ni t \mapsto Re^{it}$ et de l'opposé de $\psi_R : [0; R] \ni t \mapsto t\, e^{i\pi/4}$, qui sont tous des chemins C^1.
On admet que l'intégrale généralisée

$$I \ := \ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

est convergente.

1. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
   On **admet** que f a une primitive sur $\mathbb{C}$.

2. On montre ici que
$$\lim_{R \to +\infty} R \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \cos(s)}\, \mathrm{d}s \ = \ 0\,. \tag{1}$$

   a). Soit $\eta \in]0; \pi/2[$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $R \geq 1$, on ait
$$R \int_\eta^{\pi/2} e^{-R^2 \cos(s)}\, \mathrm{d}s \ \leq \ \frac{C}{R}\,.$$
   (Indication : on pourra utiliser le changement de variables $s = \mathrm{Arccos}\,(u/R^2)$.)

   b). Conclure.

3. Montrer que
$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, \mathrm{d}z \ = \ 0\,. \tag{2}$$

4. En déduire que la limite suivante existe et vaut :
$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{-it^2}\, \mathrm{d}t \ = \ e^{-i\pi/4}\, I\,. \tag{3}$$

L3M, Analyse complexe.

Correction du contrôle continu du 7 octobre 2025.

Exercice 1, 5 pts :

1. L est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si L est la multiplication par un nombre complexe si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$
avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
1,5 pts.

2. La matrice jacobienne de f au point $i = (0; 1) \in \mathbb{C}$ est
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$
En effet, c'est la matrice dans la base canonique de la différentielle de f au point i et, comme f est holomorphe en i, elle doit être de la forme du 1 et les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}$ de $f'(i)$ forme la première colonne de cette matrice.
2 pts.

3. Pour $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$, on a
$$\mathrm{Arg}(z) \;=\; 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}\,(z)}{\mathrm{Re}\,(z) \;+\; |z|}\right).$$
1,5 pts.

Exercice 2, 7 pts :

1. Par le cours, la fonction polynômiale $z \mapsto 1 + z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et, comme elle ne s'annule pas sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, par inversion.
1,5 pts.
Pour $z = (x; y) \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, on a
$$f(z) \;=\; \frac{\overline{1 \,+\, z}}{|1 \,+\, z|^2} \;=\; \frac{1 \,+\, x \,-\, iy}{(1+x)^2 \,+\, y^2}$$
donc
$$\mathrm{Re}\, f(x; y) \;=\; \frac{1 \,+\, x}{(1+x)^2 \,+\, y^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, f(x; y) \;=\; \frac{-y}{(1+x)^2 \,+\, y^2}.$$

Comme les applications $(x;y) \mapsto x$ et $(x;y) \mapsto y$ sont C^1 et comme $\mathbb{C} \setminus \{-1\} \ni z \mapsto |1+z|^2$ ne s'annule pas, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont C^1 sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par somme, produit et quotient. De plus, pour $(x;y) \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, on a

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(x;y) = \frac{(1+x)^2 + y^2 - 2(1+x)^2}{\left((1+x)^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - (1+x)^2}{\left((1+x)^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(x;y) = \frac{-(1+x)\,2y}{\left((1+x)^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(x;y) = \frac{y\,2(1+x)}{\left((1+x)^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(x;y) = \frac{-\left((1+x)^2 + y^2\right) - (-y)\,2y}{\left((1+x)^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - (1+x)^2}{\left((1+x)^2 + y^2\right)^2}.$$

On voit que les conditions de Cauchy-Riemann en $(x;y)$

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(x;y) = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(x;y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(x;y) = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(x;y)$$

sont remplies.
1,5 pts.

2. Comme les applications $(x;y) \mapsto x$ et $(x;y) \mapsto y$ sont C^1, les fonctions $\operatorname{Re} g : \mathbb{C} \ni (x;y) \mapsto x^5 y^4$ et $\operatorname{Im} g : \mathbb{C} \ni (x;y) \mapsto xy^3$ sont C^1 par produits. De plus, pour $(x;y) \in \mathbb{C}$, on a

$$\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x}(x;y) = 5x^4y^4, \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial y}(x;y) = 4x^5y^3, \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x}(x;y) = y^3, \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial y}(x;y) = 3xy^2.$$

On a donc, pour $(x;y) \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x}(x;y) = \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial y}(x;y) &\iff xy^2\,(5x^3y^2 - 3) = 0 \\ &\iff x = 0 \;\text{ ou }\; y = 0 \;\text{ ou }\; 5x^3y^2 = 3\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial y}(x;y) = -\frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x}(x;y) &\iff y^3\,(4x^5 + 1) = 0 \\ &\iff y = 0 \;\text{ ou }\; 4x^5 = -1\,.\end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann en $(x;y)$ pour g sont remplies si et seulement si

$$\big(x = 0 \text{ et } y = 0\big) \text{ ou } (y = 0) \text{ ou } \big(y = 0 \text{ et } 4x^5 = -1\big) \text{ ou } \big(5x^3y^2 = 3 \text{ et } 4x^5 = -1\big),$$

mais comme les propositions dans la dernière parenthèse sont incompatibles (la seconde impose $x < 0$ ce qui invalide la première), si et seulement si

$$\big(x = 0 \;\text{ et }\; y = 0\big) \;\text{ ou }\; (y = 0) \;\text{ ou }\; \big(y = 0 \;\text{ et }\; 4x^5 = -1\big) \iff y = 0\,.$$

D'après le cours, g est holomorphe sur l'ensemble $\Omega := \{(x;y) \in \mathbb{C}\,;\; y = 0\}$.
4 pts.

Exercice 3, 9 pts :

1. Par le cours, la fonction polynômiale $z \mapsto -z^2$ et la fonction exponentielle sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ donc f est holomorphe par composition.
   1,5 pts.
   Remarque : Comme exp est la somme d'une série entière sur $\mathbb{C}$, il en est de même de f. Par le cours, f admet une primitive sur son disque de convergence, à savoir $\mathbb{C}$.

2. **Total : 2,5 pts.**

   a). Comme s parcourt un intervalle inclus dans $]0;\pi[$, $\cos(s) = v$ équivaut à $s = \mathrm{Arccos}(v)$ avec $v \in]-1;1[$. Comme Arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et $\mathrm{Arccos}'(v) = -1/\sqrt{1-v^2}$, on a

   $$\frac{d}{du}\big(\mathrm{Arccos}(u/R^2)\big) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-u^2/R^4}}\,\frac{1}{R^2}\,.$$

   Par le changement de variables $s = \mathrm{Arccos}(u/R^2)$, on a

   $$\begin{aligned} 0 \;\leq\; R\int_{\eta}^{\pi/2} e^{-R^2\cos(s)}\,\mathrm{d}s \;&=\; -R\int_{R^2\cos(\eta)}^{0} e^{-R^2\,u/R^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2/R^4}}\,\frac{1}{R^2}\,du \\ &=\; \frac{1}{R}\int_0^{R^2\cos(\eta)} e^{-u}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2/R^4}}\,\mathrm{d}u\,. \end{aligned}$$

   Pour $u \in [0; R^2\cos(\eta)]$, on a $u^2/R^4 \leq \cos^2(\eta)$ donc $1-u^2/R^4 \geq 1-\cos^2(\eta) > 0$, car $\eta \in]0;\pi/2[$. En posant

   $$C \;:=\; \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\eta)}}\; I \in]0;+\infty[\,,$$

   on a donc

   $$0 \;\leq\; R\int_{\eta}^{\pi/2} e^{-R^2\cos(s)}\,\mathrm{d}s \;\leq\; \frac{1}{R\sqrt{1-\cos^2(\eta)}}\int_0^{R^2\cos(\eta)} e^{-u}\,\mathrm{d}u \;\leq\; \frac{C}{R}\,.$$

   1,5 pts.

   b). Soit $\eta \in]0;\pi/2[$. Comme cosinus décroit sur $[0;\eta]$,

   $$0 \;\leq\; R\int_0^{\eta} e^{-R^2\cos(s)}\,\mathrm{d}s \;\leq\; R\int_0^{\eta} e^{-R^2\cos(\eta)}\,\mathrm{d}s \;=\; \eta\,R\,e^{-R^2\cos(\eta)}\,.$$

   Donc, d'après le a),

   $$0 \;\leq\; R\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\cos(s)}\,\mathrm{d}s \;\leq\; \frac{C}{R} + \eta\,R\,e^{-R^2\cos(\eta)}\,. \tag{4}$$

   On a

   $$\frac{C}{R} + \eta\,R\,e^{-R^2\cos(\eta)} \;=\; \frac{C}{R} + \frac{\eta}{R\cos(\eta)}\,R^2\cos(\eta)\,e^{-R^2\cos(\eta)}$$

Comme $\cos(\eta) > 0$, on a, par le cours,

$$\lim_{R \to +\infty} R^2 \cos(\eta)\, e^{-R^2 \cos(\eta)} \;=\; 0$$

et, comme $\lim\limits_{R \to +\infty} 1/R = 0$,

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{C}{R} + \eta\, R\, e^{-R^2 \cos(\eta)} \;=\; 0\,.$$

On obtient le résultat cherché par le théorème des gendarmes et (4).
1 pt.

3. Pour $R \geq 1$, on a, par définition,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, \mathrm{d}z \;=\; \int_0^{\pi/4} \exp\big(-R^2 e^{2it}\big)\, Rie^{it}\, \mathrm{d}t$$

donc, en utilisant le cours et un changement de variables,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_R} f(z)\, \mathrm{d}z\right| \;&\leq\; \int_0^{\pi/4} \big|\exp\big(-R^2 e^{2it}\big)\big|\, R\, \mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\pi/4} \big|\exp\big(-R^2 \cos(2t)\big)\big|\, R\, \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2} R \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \cos(s)}\, \mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

D'après 2 et le théorème des gendarmes, on obtient le résultat demandé.
2 pts.

4. Soit $R \geq 1$. Par le cours, Γ_R est un chemin continu et C^1 par morceaux. Comme $\varphi_R(0) = 0 = \psi_R(0)$, Γ_R est fermé. Comme f admet une primitive sur $\mathbb{C}$ (cf. 1),

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, \mathrm{d}z \;=\; 0\,,$$

par le cours. Donc, par le cours et 3, on a, lorsque $R \to +\infty$,

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_{\varphi_R} f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\, \mathrm{d}z - \int_{\psi_R} f(z)\, \mathrm{d}z \\ &= \int_0^R e^{-t^2}\, \mathrm{d}t + o(1) - \int_0^R \exp\big(-t^2 e^{i\pi/2}\big)\, e^{i\pi/4}\, \mathrm{d}t \\ &= I + o(1) - e^{i\pi/4} \int_0^R \exp\big(-it^2\big)\, \mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

puisque l'intégrale I est convergente. On en déduit que la limite suivante existe et vaut

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{-it^2}\, \mathrm{d}t \;=\; e^{-i\pi/4}\, I\,.$$

3 pts.