

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif. Elle comprend des questions de cours et deux exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés.

Sauf mention contraire explicite, toute réponse à une question d'un exercice doit être justifiée.

Notations : La fonction exponentielle complexe est notée $\exp$ et, pour $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $e^z := \exp(z)$. La fonction logarithme principal est notée Log . La fonction argument principal est notée Arg .

Pour tout $(z_0; z_1) \in \mathbb{C}^2$, soit $\psi_{z_0; z_1} : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin C^1 défini par, pour $t \in [0; 1]$, $\psi_{z_0; z_1}(t) = tz_1 + (1 - t)z_0$.

On pourra utiliser, **sans justification**, les faits suivants :

F1 : $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \neq 1$.

F2 : Soit A une partie de $\mathbb{R}^+$ ayant un maximum et $\lambda \geq 0$. Alors $\max \{\lambda a; a \in A\} = \lambda \cdot \max A$.

On **ne justifiera pas** les calculs d'indice, le caractère ouvert d'un ensemble, le caractère étoilé d'un ouvert ni le caractère connexe par arcs d'un ouvert.

Exercice 1. : 5 pts. Questions de cours.

Compléter les énoncés suivants pour en faire un résultat du cours.

1. Théorème de Liouville :
2. Soit Ω et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ Alors f admet une primitive sur Ω .
3. Pour tout chemin fermé $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ et tout $z \in (\mathbb{C} \setminus \gamma([a; b]))$, l'indice $\text{Ind}(\gamma; z)$ de z par rapport à γ appartient à

Exercice 2. : 9 pts.

On considère le chemin $C^1 \gamma : [0; \text{Arg}(2 + 2i)] \rightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = |2 + 2i|e^{it}$. Soit Γ la concaténation de $\psi_{0; 2+2i} \dot{+} (\gamma)_{\text{opp}} \dot{+} \psi_{|2+2i|; 0}$. C'est un chemin fermé. On note par $\mathcal{I}_\Gamma$ son image. Soit $F := \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) \geq 0 \text{ et } \text{Im}(z) \geq 0\}$. Soit $u := 2 + i\sqrt{3}$.

On considère les intégrales

$$J_1 := \int_{\Gamma} \frac{\text{Log}(1 + z)}{z - 2 - i\sqrt{3}} dz \quad \text{et} \quad J_2 := \int_{\Gamma} \frac{z^2}{(z - 2)^2 + 3} dz.$$

On **admet** que $\mathcal{I}_\Gamma \subset L \subset F$, où

$$L := (1+i)\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^+ \cup (C(0; |2+2i|) \cap F)$$

et $C(0; |2+2i|)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon $|2+2i|$.

1. Vérifier que $\bar{u} \notin \mathcal{I}_\Gamma$ et $u \notin \mathcal{I}_\Gamma$.
2. Justifier que J_1 est bien définie et déterminer ses parties réelle et imaginaire.
(Indication : on pourra appliquer la formule de Cauchy à une fonction appropriée.)
3. Justifier que J_2 est bien définie et déterminer ses parties réelle et imaginaire.

Exercice 3. : 7 pts.

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z \exp(z)$.

1. Montrer que le maximum suivant existe et que l'on a

$$\sup_{D(-1;1]} |f| = \max_{t \in [0; 2\pi]} \frac{2}{e} |\sin(t/2)| e^{\cos(t)}. \quad (1)$$

2. Trouver un $z_0 \in D(-1; 1]$ tel que

$$|f(z_0)| = \sup_{D(-1;1]} |f|$$

(Indication : on pourra utiliser la fonction $g : [0; 1] \ni s \mapsto e^{2s} \sqrt{1-s}$.)

Que vaut $|f(z_0)|$?

Exercice 1, 5 pts :

1. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (ou C_h^1) qui est bornée. Alors elle est constante.
2 pts.
2. Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f admet une primitive sur Ω .
2 pts.
3. Pour tout chemin fermé $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et tout $z \in (\mathbb{C} \setminus \gamma([a; b]))$, l'indice $\text{Ind}(\gamma; z)$ de z par rapport à γ appartient à $\mathbb{Z}$.
1 pt.

Exercice 2, 9 pts :

1. Comme $\bar{u} = 2 - i\sqrt{3}$, $\text{Im}(\bar{u}) < 0$ donc $\bar{u} \notin F$. Par le fait admis, $\mathcal{I}_\Gamma \subset F$ donc $\bar{u} \notin \mathcal{I}_\Gamma$. Comme $\text{Im}(u) = -\text{Im}(\bar{u}) \neq 0$, $u \notin \mathbb{R}^+$. S'il existait $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $u = (1+i)t$, on aurait $t = 2$ et $t = \sqrt{3}$ et une contradiction car $\sqrt{3} \neq 2$ par F1. Donc $u \notin (1+i)\mathbb{R}^+$. Comme $|u|^2 = 4 + 3 = 7 \neq 8 = |2 + 2i|^2$, $|u| \neq |2 + 2i|$ et $u \notin C(0; |2 + 2i|)$. D'où $u \notin L$. Par le fait admis, $\mathcal{I}_\Gamma \subset L$ donc $u \notin \mathcal{I}_\Gamma$.
2 pts.

2. Soit

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{-1 - r; r \in \mathbb{R}^+\}.$$

C'est un ouvert étoilé. L'application $\Omega \ni z \mapsto 1 + z$ est holomorphe (cf. cours) et bijective de Ω sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Par le cours, Log est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ donc, par composition, $\Omega \ni z \mapsto \text{Log}(1 + z)$ est holomorphe. Pour $z \in F$, on a $\text{Re}(z) \geq 0$ donc

$$z \notin \{-1 - r; r \in \mathbb{R}^+\}$$

et $z \in \Omega$. D'où $F \subset \Omega$. Par le fait admis, $\mathcal{I}_\gamma \subset \Omega$. Par la formule de Cauchy appliquée à $\Omega \ni z \mapsto \text{Log}(1 + z)$ en $u \notin \mathcal{I}_\Gamma$ (cf. 1), on a, d'après F1,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_\Gamma \frac{\text{Log}(1 + z)}{z - u} dz = 2i\pi \text{Ind}(\Gamma; u) \text{Log}(1 + u) \\ &= -2i\pi \text{Log}(3 + i\sqrt{3}) = -2i\pi \text{Log}(2\sqrt{3} \exp(i\pi/6)) \\ &= -2i\pi (\ln(2\sqrt{3}) + i\pi/6) = \pi^2/3 - 2i\pi \ln(2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

3 pts.

3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}(z-2)^2 + 3 &= (z-2)^2 - (i\sqrt{3})^2 = (z-2-i\sqrt{3})(z-2+i\sqrt{3}) \\ &= (z-u)(z-\bar{u}).\end{aligned}\quad (2)$$

Soit $U := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > -\sqrt{3}\}$. C'est un ouvert étoilé. Pour $z \in F$, on a $\operatorname{Im}(z) \geq 0 > -\sqrt{3}$ donc $z \in U$. D'où $F \subset U$. D'après le fait admis, $\mathcal{I}_\Gamma \subset U$. Comme $\operatorname{Im}(\bar{u}) = -\sqrt{3}$, $\bar{u} \notin U$. Donc l'application $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \in U$,

$$h(z) = \frac{z^2}{z - \bar{u}}$$

est holomorphe, comme quotient de fonction polynômes, le dénominateur ne s'annulant pas. Par la formule de Cauchy appliquée à h sur U en $u \notin \mathcal{I}_\Gamma$, on a, d'après (2),

$$\begin{aligned}J_2 &= \int_\Gamma \frac{z^2}{(z-u)(z-\bar{u})} dz = \int_\Gamma \frac{h(z)}{z-u} dz = 2i\pi \operatorname{Ind}(\Gamma; u) h(u) \\ &= -2i\pi \frac{(2+i\sqrt{3})^2}{u-\bar{u}} = -2i\pi \frac{4-3+4i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 4i\pi.\end{aligned}$$

4 pts.

Exercice 3, 7 pts :

1. Comme les polynômes et l'exponentielle sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ (cf. cours), f l'est aussi par produit. Par le cours, f est continue sur $\mathbb{C}$. Donc f est holomorphe sur $D(-1; 1[$ et continue sur $D(-1; 1] = \overline{D}(-1; 1[$. Par le principe du maximum, on a

$$\sup_{D(-1; 1]} |f| = \max_{C(-1; 1)} |f| = \max_{t \in [0; 2\pi]} |f(-1 + e^{it})| \quad (3)$$

car $C(-1; 1) = \{-1 + e^{it}; t \in [0; 2\pi]\}$, par le cours. Pour $t \in [0; 2\pi]$, on a

$$\begin{aligned}|f(-1 + e^{it})| &= |-1 + e^{it}| |\exp(-1 + e^{it})| \\ &= |-e^{-it/2} + e^{it/2}| \exp(-1 + \cos(t)) \\ &= \frac{1}{e} |2i \sin(t/2)| e^{\cos(t)} = \frac{2}{e} |\sin(t/2)| e^{\cos(t)}.\end{aligned}$$

D'après (3), on obtient (1).

4 pts.

2. Pour $t \in [0; 2\pi]$, on a

$$|\sin(t/2)| e^{\cos(t)} = \sqrt{1 - \cos^2(t/2)} e^{2\cos^2(t/2)-1} = \frac{1}{e} g(\cos^2(t/2)),$$

où $g : [0; 1] \ni s \mapsto e^{2s}\sqrt{1-s}$.

Par le cours,

$$\{\cos(t/2); t \in [0; 2\pi]\} = [-1; 1] \quad \text{et} \quad \{\cos^2(t/2); t \in [0; 2\pi]\} = [0; 1]$$

donc, par (1) et F2,

$$\sup_{D(-1;1]} |f| = \frac{2}{e^2} \max_{s \in [0;1]} g(s). \quad (4)$$

Par produit, g est continue et g est dérivable sur $[0; 1[$. Pour $s \in [0; 1[$, on a

$$\begin{aligned} g'(s) &= 2e^{2s} \sqrt{1-s} - \frac{1}{2\sqrt{1-s}} e^{2s} = \frac{4(1-s) - 1}{2\sqrt{1-s}} e^{2s} \\ &= \frac{3-4s}{2\sqrt{1-s}} e^{2s}. \end{aligned}$$

La fonction g est donc croissante sur $[0; 3/4]$ et décroissante sur $[3/4; 1]$. Elle est donc maximale en $3/4$ et $g(3/4) = (1/2)e^{3/2}$. D'après (4),

$$\sup_{D(-1;1]} |f| = \frac{2}{e^2} \frac{1}{2} e^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Soit $z_0 = -1 + e^{i\pi/3} \in C(-1; 1)$. Comme $\cos^2(\pi/6) = 3/4$ par F1, on a, d'après les résultats précédents

$$|f(z_0)| = \frac{2}{e^2} g(\cos^2(\pi/6)) = \frac{2}{e^2} g(3/4) = \sup_{D(-1;1]} |f| = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3 pts.