L1S2, Analyse 2, 2021/2022.

Examen, **2h.**.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.
Examen noté sur 20, le barème est indicatif.

L'épreuve comprend 5 exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Toute réponse à une question doit être justifiée.**

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (3 pts).
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition ou une formulation équivalente de la proposition $(\ell = \lim u)$. Montrer la convergence de la suite

$$v \;=\; \left(-3 + \frac{5}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

Exercice 2. : (5 pts).
Soit $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction partie entière. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est le maximum de l'ensemble $\{p \in \mathbb{Z};\, p \leq x\}$.
On considère les suites réelles $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n \;=\; \frac{n^3 + 7n + 3}{2n^3 + n^2 + n} \quad \text{et} \quad a_n \;=\; E\Big(-3 + \sin^2(n) \cdot w_n\Big)\,.$$

1. Vérifier que E est constante sur $[-3; -2[$. Donner la valeur de la constante.
2. Montrer que la suite w converge et déterminer sa limite, notée ℓ.
3. En utilisant le fait que $](1/4); (3/4)[$ est un voisinage de ℓ, montrer que la propriété

$$\mathcal{E}(n) \;=\; \Big(-3 \,\leq\, -3 + \sin^2(n) \cdot w_n \,<\, -2\Big)$$

   est vraie à partir d'un certain rang.
4. En déduire que la suite a est stationnaire, c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang.
5. La suite a a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Tournez, svp.

Exercice 3. : (5 pts).
On considère la suite réelle $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\,.$$

1. Montrer que s est strictement croissante.
2. Justifier que s a une limite.
3. Montrer que, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$,
$$0 \;\leq\; s_n \;\leq\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\,. \tag{1}$$
4. Montrer que s est majorée par 2.
Indication : on pourra montrer que, pour $k \in [\![2;n]\!]$,
$$\frac{1}{k(k-1)} \;=\; \frac{1}{k-1} \;-\; \frac{1}{k}\,.$$
5. En déduire que $\lim s \in](5/4);2]$.

Exercice 4. : (3 pts).
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \cdot \sin(1/x)$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
2. Le prolongement $\hat{f}$ par continuité de f en 0 est-il dérivable en 0 ?

Exercice 5. : (6 pts).
Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynômiale définie par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) \;=\; x^6 + \frac{x^4}{4} + x^3 + 2x + 1\,.$$

On rappelle que la borne inférieure $\inf P$ de P est la borne inférieure $\inf P(\mathbb{R})$ de l'ensemble non vide

$$P(\mathbb{R}) \;:=\; \big\{P(x)\,;\, x \in \mathbb{R}\big\}\,.$$

1. Déterminer explicitement P', la dérivée de P.
2. Montrer que les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$ existent et valent $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe $(a_-;a_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_- < 0 < a_+$ et tel que
$$\forall x \in \big(]-\infty;a_-[\,\cup\,]a_+;+\infty[\big)\,,\quad P(x) \;>\; P(0)\,.$$
4. Montrer que la borne inférieure $\inf P$ de P est atteinte, c'est-à-dire que $P(\mathbb{R})$ admet un minimum ou encore qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = \inf P$.
5. Montrer que P n'admet pas de minimum positif.

Fin de l'épreuve.