L1S2, Analyse 2, CUPGE.

Contrôle continu du 22 février 2023, **55 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif.

Exercice 1. : 5 pts.
Montrer la validité des propositions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\quad x^4 + 1 \geq 1\big)\,,\\
\mathcal{Q} &= \Big(\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\Big)\,,\\
\mathcal{R} &= \big(\forall\, x \in]1;+\infty[\,,\ \exists\, y \in \mathbb{R};\ x^2 < y < x^3\big)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2. : 4 pts.
Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $\omega^7 = 1$. Montrer la nullité des sommes

$$s_1 := \sum_{k=0}^{6} \omega^k \quad \text{et} \quad s_2 := \sum_{k=3}^{9} \omega^k\,.$$

Exercice 3. : 8 pts.
Déterminer la borne supérieure des ensembles non vides suivants :

$$A := [-3;2] \cup]-5;0[\,,\quad B := [-7;-2] \cap]-5;0[\,,\quad C := [2;9[$$

et

$$D := \left\{(-1)^n \cdot \frac{5-(-1)^n}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}\,.$$

Exercice 4. : 3 pts.
On rappelle que, pour $R \in \mathbb{R}^{+*}$, on note le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon R par $D(0;R[$. On rappelle que $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels. Montrer la validité de la proposition

$$\mathcal{S} = \big(\forall\, \epsilon > 0\,,\ \exists\, r \in \mathbb{Q}^{+*};\ D(0;r[\, \subset D(0;\epsilon[\big)\,.$$