## L1S2, Analyse 2, CUPGE.

Contrôle continu du 21 avril 2023, **55 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac. Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

Exercice 1. : 5 pts. Justifier toute réponse.

Soit  $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  données par, pour  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = \frac{x^3 + x - 3}{4x^2 + 1}$$
 et  $g(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right)$ .

- 1. Vérifier que f admet  $+\infty$  comme limite en  $+\infty$ .
- 2. Montrer que la fonction g n'a pas de limite en  $+\infty$ .
- 3. Donner deux fonctions  $h_1: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $h_2: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  telles que  $h_1$  et  $h_2$  ont  $+\infty$  pour limite en  $+\infty$  et la fonction  $h_1 h_2$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

Exercice 2. : 5 pts. Justifier toute réponse.

Soit  $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par, pour  $x \ge 0$ ,

$$f(x) = 1 + \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^4 + x^3 + x + 2}.$$

- 1. Vérifier que, pour  $x \ge 0$ , 1 < f(x) < 2.
- 2. Soit  $b \in ]0; +\infty[$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in [1; 2[$  tel que, pour tout  $x \in [0; b], f(x) \le \lambda$ .
- 3. Existe-t-il  $\lambda \in [1; 2[$  tel que, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f(x) \leq \lambda$ ?