

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur **10**, le barème est indicatif.

Sauf mention contraire explicite, toute réponse doit être justifiée.

On rappelle que $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et que l'on note par $\cos$ la fonction cosinus.

Exercice 1. : 4,5 pts. Vrai ou faux.

Sans justification, indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Attention : 0,75 pt pour une réponse correcte, -0,25 pt pour une réponse incorrecte, 0 pt pour l'absence de réponse. Note minimale à l'exercice : 0.

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un voisinage de -1 .
2. L'ensemble $] -\infty; -3[\cup \{0\} \cup [7; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
3. Une suite minorée par 3 à partir du rang 7 est minorée.
4. Une suite positive et décroissante converge vers 0.
5. La suite $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-4n^2\sqrt{n} + 3n - 9)(n^2 + 5)^{-1}$, tend vers $-\infty$.
6. Il existe une suite $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$ qui tend vers 0 et telle que la suite $(1/w) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $(1/w)(n) = 1/w_n$, n'a pas de limite.

Exercice 2. : 2,5 pts.

Soit $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (n!) - 3n^2$.

1. Montrer que, pour $n \geq 6$, $x_n \geq n$.
2. La suite x a-t-elle une limite ? Si oui, la déterminer.

Exercice 3. : 3 pts.

On considère la suite $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{3n^2 + \cos(n)}{n^2 + 1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|u_n - 3| \leq \frac{4}{n^2}. \quad (1)$$

2. Montrer, **en n'utilisant que la définition de limite ou l'une de ses formulations équivalentes**, que la suite u converge.

Exercice 1, 4,5 pts : 1. Fausse. 2. Vraie. 3. Vraie. 4. Fausse. 5. Vraie. 6. Vraie.

Exercice 2, 2,5 pts :

1. On a vu en cours que $n! \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \geq 6$. On a $n! = n \cdot ((n-1)!) = n(n-1)((n-2)!)$ et $(n-2)! \geq n-2$. Donc

$$x_n - n \geq n((n-1)(n-2) - 3n - 1) = n(n^2 - 6n + 1) \geq 0$$

car $n \geq 6$ donc $n^2 - 6n = n(n-6) \geq 0$.

1,5 pts.

2. Par le cours, $\lim n = +\infty$. Par le 1 et le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim x_n = +\infty$.

1 pt.

Exercice 3, 3 pts :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|u_n - 3| = \left| \frac{3n^2 + \cos(n) - 3n^2 - 3}{n^2 + 1} \right| = \frac{|\cos(n) - 3|}{n^2 + 1}.$$

Comme $|\cos(n)| \leq 1$ (cf. cours), on a $|\cos(n) - 3| \leq |\cos(n)| + 3 \leq 4$. Comme $n^2 + 1 \geq n^2 > 0$, on en déduit que

$$|u_n - 3| \leq \frac{4}{n^2 + 1} \leq \frac{4}{n^2}.$$

1 pt.

2. On montre que u tend vers 3. Soit $\epsilon > 0$. On pose $N = \lfloor 2/\sqrt{\epsilon} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. On a, par les propriétés de la partie entière, $n > 2/\sqrt{\epsilon}$ donc, comme $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $n^2 > 4/\epsilon$ et, comme $\epsilon/n^2 > 0$, on obtient $\epsilon > 4/n^2$, par multiplication. D'après le 1, on a donc $|u_n - 3| < \epsilon$.

2 pts.