

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

L'épreuve comprend 2 exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Sauf mention contraire explicite, toute réponse à une question doit être justifiée.**

Pour toute l'épreuve, les faits suivants pourront être utilisés **sans les justifier** :

F1 : La fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et strictement croissante. Elle est nulle en 0, vaut 1 en 1 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

F2 : La fonction logarithme népérien $\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, dérivable et sa dérivée est la fonction $]0; +\infty[\ni t \mapsto 1/t$. De plus, $\ln(2) > 0$.

F3 : On pourra utiliser les résultats démontrés en TD sur la fonction partie entière E .

Exercice 1. : 5 pts.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par,

$$\text{pour } x \geq -1, \quad f(x) = -x + \sqrt{1+x}$$

$$\text{et pour } x < -1, \quad f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. La fonction f est-elle continue en -1 ? Justifier toute réponse.

Exercice 2. : 5,5 pts.

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-ax}}{x} \quad \text{si } x < 0$$

$$\text{et par } g(x) = 2 + \frac{E(x)}{x} \quad \text{si } x > 0.$$

1. Montrer que g admet 2 pour limite à droite en 0.
2. Déterminer l'ensemble A des réels $a \in \mathbb{R}^+$ pour lesquels g admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 1, 5 pts :

1. Les fonctions polynômes $x \mapsto x$, $x \mapsto -x$, $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto 1+x^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$ par le cours. Comme $\sqrt{\cdot}$ est continue (cf. F1), la fonction $]-1; +\infty[\ni x \mapsto \sqrt{1+x}$ est continue par composition. Comme f coïncide sur $]-1; +\infty[$ avec la fonction $x \mapsto -x + \sqrt{1+x}$, f est continue sur $]-1; +\infty[$, par somme.

1,5 pts.

Comme $\ln$ est continue (cf. F2), la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto \ln(1+x^2)$ est continue par composition. Comme f coïncide sur $]-\infty; -1[$ avec la fonction $\mathbb{R}^* \ni x \mapsto (1/x)\ln(1+x^2)$ et comme la fonction $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $]-\infty; -1[$, f est continue sur $]-\infty; -1[$, par quotient.

1,5 pts.

2. Supposons que f soit continue en -1 . Alors, par le cours, on a

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f = f(-1) = -(-1) + \sqrt{1+(-1)} = 1. \quad (1)$$

Pour $x < -1$, on a

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1 \neq 0$ et comme $\lim_{y \rightarrow 2} \ln(y) = \ln(2)$ (puisque $\ln$ est continue par F2), on a, par produit, somme, composition et quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\ln(2)}{-1} = -\ln(2)$$

et, par le cours,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = -\ln(2)$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = -\ln(2) < 0$ (cf. F2), ce qui contredit (1). Donc f n'est pas continue en -1 .

2 pts.**Exercice 2, 5,5 pts :**

1. On doit étudier la limite en 0 de la restriction $g|_{\mathbb{R}^{+*}}$ de g à $\mathbb{R}^{+*}$. Pour ce faire, il suffit, par le cours, d'étudier la limite en 0 de la restriction h de $g|_{\mathbb{R}^{+*}}$ à l'intervalle $] -1; 1[$. Donc $h :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ associée à $x \in]0; 1[$, $h(x) = 2 + E(x)/x = 2$, puisque E est nulle sur $]0; 1[$. Comme h est constante, elle tend vers 2 en 0. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g = 2$.

1,5 pts.

2. Pour $x < 0$, on a

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-ax}}{x} = \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-ax})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-ax})}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-ax})} \\
 &= \frac{(1-x) - (1-ax)}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-ax})} = \frac{(a-1)x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-ax})} \\
 &= \frac{a-1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-ax}}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ (cf. cours), $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$, par le cours. Comme $\sqrt{\cdot}$ est continue (cf. F1),

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-x} + \sqrt{1-ax} = 2 \neq 0,$$

par produit, somme et composition. Par quotient, on déduit de (2) que $\lim_{0^-} g = (a-1)/2$.

2 pts.

Par le cours, g se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $\lim_0 g$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{0^-} g = \lim_{0^+} g \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède et le 1, on a donc : g se prolonge par continuité en 0 si et seulement si

$$2 = \frac{a-1}{2} \iff a = 5.$$

Donc $A = \{5\}$.

2 pts.