

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

L'épreuve comprend une question de cours et deux exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Sauf mention contraire explicite, toute réponse à une question doit être justifiée.**

Pour toute l'épreuve, les faits suivants pourront être utilisés **sans les justifier** :

F1 : Un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

F2 : Un polynôme à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines réelles.

Question de cours : 1 pt.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$, $a \in D$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que a est adhérent à $D \cap]a; +\infty[$. Donner la définition de la phrase "La fonction f est continue à droite en a ".

Exercice 1. : 7,5 pts.

On considère la fonction polynôme $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4.$$

Soit $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x) - x$.

1. Montrer que Q admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.
2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x_0) = 0$.
3. Montrer que l'ensemble F des points fixes de P est non vide et fini.
4. Soit $a = \max F$ (qui est bien défini d'après 3 et **F1**). Montrer que, pour $x > a$, $Q(x) > 0$.
5. Montrer que la suite récurrente u , définie par $u_0 > a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = P(u_n)$, diverge vers $+\infty$.
(Indication : on pourra montrer que u est croissante.)

Exercice 2. : 4,5 pts.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x). \quad (1)$$

1. Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y/2) = f(y). \quad (2)$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(t 2^{-n}) = f(t)$.
3. On suppose que f est continue en 0. Montrer que f est constante.

Question de cours : 1 pt.

f est continue à droite en a si la limite à droite de f en a existe et vaut $f(a)$.

Exercice 1, 7,5 pts :

1. Pour $x > 0$, on a

$$Q(x) = x^4 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right). \quad (3)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x) = 0$ par le cours, on a, par produit

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^4}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ par le cours, la fonction entre parenthèse dans (3) tend vers $1 > 0$, quand $x \rightarrow +\infty$, par somme.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ par le cours, on a, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ et, par (3) et par produit encore, $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = +\infty$.

1,5 pts.

2. **Version 1 :** Comme Q est un polynôme, Q est continue par le cours. On a $Q(0) = -4 < 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q = +\infty > 0$, il existe, par le cours, $A \in \mathbb{R}$, tel que, pour $x > A$, $Q(x) > 0$. Donc $Q(A+1) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à Q entre 0 et $A+1$, il existe un x_0 compris entre 0 et $A+1$ tel que $Q(x_0) = 0$.

Version 2 : On a $Q(0) = -4 < 0$ et $Q(2) = 6 > 0$. Comme Q est un polynôme, Q est continue par le cours. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à Q entre 0 et 2, il existe un $x_0 \in [0; 2]$ tel que $Q(x_0) = 0$.

1,5 pts.

3. Par définition de Q , $F = \{x \in \mathbb{R}; P(x) = x\} = \{x \in \mathbb{R}; Q(x) = 0\} = Q^{-1}(\{0\})$. L'ensemble F est non vide car, d'après 2, il contient x_0 . Comme Q est une fonction polynôme de degré 4, F a au plus 4 éléments par **F2**.

1 pt.

4. Supposons qu'on ait un $x_1 > a$ tel que $Q(x_1) \leq 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q = +\infty > 0$, il existe, par le cours, $A \in \mathbb{R}$, tel que, pour $x > A$, $Q(x) > 0$. On pose $x_2 = |A| + |x_1| + 1 > x_1$. Comme $x_2 > A$, $Q(x_2) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à Q entre x_1 et x_2 , il existe un $c \in [x_1; x_2]$ tel que $Q(c) = 0$. Donc $c \in F$ mais $c \geq x_1 > a$. Cela contredit le fait que $a = \max F$. On a montré par l'absurde que Q

est strictement positive sur $]a; +\infty[$.

1,5 pts.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{R}(n) = (a < u_n \leq u_{n+1})$. Comme $u_0 > a$, $Q(u_0) > 0$ par 4 donc $u_1 = P(u_0) > u_0$. Donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{R}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse de récurrence, $a < u_n \leq u_{n+1}$. Comme $a < u_{n+1}$, $Q(u_{n+1}) > 0$ par 4 et donc $u_{n+2} = P(u_{n+1}) > u_{n+1}$. Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par le cours, u est donc croissante. Par le cours, $\ell := \lim u$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et

$$\ell = \sup \{u_n; n \in \mathbb{N}\} =: \sup u.$$

Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors, comme P est continue (car polynôme), ℓ est un point fixe de P , par le cours. Donc $Q(\ell) = 0$. Mais $\ell = \sup u \geq u_0 > a$. Cela contredit 4. Donc $\ell = +\infty$.

2 pts.

Exercice 2, 4,5 pts :

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. D'après (1) pour $x = y/2$, on a $f(y) = f(2(y/2)) = f(y/2)$. On a montré (2).

1 pt.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (f(t 2^{-n}) = f(t))$. Comme $2^{-0} = 1$, $f(t 2^{-0}) = f(t)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. D'après (1) avec $x = t 2^{-(n+1)}$, on a

$$f(t 2^{-(n+1)}) = f(2 t 2^{-(n+1)}) = f(t 2^{-n}) = f(t)$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1,5 pts.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. La suite $(t 2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $(1/2) \in [0; 1[$. Par le cours, elle tend vers 0. Comme f est continue en 0, la suite $(f(t 2^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(0)$, par le cours. Or, d'après 2, cette suite $(f(t 2^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $f(t)$ donc elle converge vers $f(t)$, par le cours. Par unicité de la limite de cette suite, on a donc $f(0) = f(t)$. Comme ceci est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, f est constante (égale à $f(0)$).

2 pts.