

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur **10**, le barème est indicatif.

Sauf mention contraire explicite, toute réponse doit être justifiée.

On rappelle que $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et que l'on note par $\cos$ la fonction cosinus.

Exercice 1. : 4,5 pts. Sans justification, indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Attention : 0,75 pt pour une réponse correcte, -0,25 pt pour une réponse incorrecte, 0 pt pour l'absence de réponse. Note minimale à l'exercice : 0.

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ est un voisinage de 4.
2. L'ensemble $] -\infty; -3[\cup \{0\} \cup [7; +\infty[$ est un voisinage de 7.
3. Une suite majorée par -2 à partir du rang 7 est majorée.
4. La suite $((-1/3)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
5. La somme de deux suites divergentes est divergente.
6. La suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1/(n+1)$, diverge.

Exercice 2. : 4 pts.

On considère les suites $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \frac{3 + \cos(n)}{n^2}, \quad x_n = \frac{-5n^2 + 7n^{-1}}{6n + 5}$$

et les suites $y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = 2^n + (-1)^n - 7^n, \quad z_n = n! - 2n - 4.$$

Montrer que chaque suite admet une limite et donner sa valeur.

(Indication : on pourra vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$, on a $n(n-1) \geq 2n+4$.)

Exercice 3. : 2 pts.

On considère la suite $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3n^2} + 7.$$

Montrer, **en n'utilisant que la définition de limite finie ou l'une de ses formulations équivalentes**, que la suite u converge.

Exercice 1, 4,5 pts : 1. Fausse. 2. Fausse. 3. Vraie. 4. Vraie. 5. Fausse. 6. Vraie.

Exercice 2, 4 pts :

D'après les propriétés de la fonction cosinus, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|w_n| = \frac{|3 + \cos(n)|}{n^2} \leq \frac{3 + |\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}.$$

Comme $\lim 1/n = 0$ par le cours, on en déduit que $\lim 4/n^2 = 0$ par produit. Par les inégalités précédentes et le théorème des gendarmes, on obtient que w tend vers 0.

0,75 pt.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x_n = \frac{n^2}{n} \cdot \frac{-5 + 7/n^3}{6 + 5/n} = n \frac{-5 + 7/n^3}{6 + 5/n}. \quad (1)$$

Par le cours, $\lim 1/n = 0$ donc, par produit et somme, le numérateur de la dernière fraction dans (1) tend vers -5 tandis que son dénominateur tend vers $6 \neq 0$. Donc, par quotient, cette fraction tend vers $-5/6 < 0$. Par le cours, $\lim n = +\infty$ donc, d'après (1), la suite x tend vers $-\infty$, par produit.

0,75 pt.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$y_n = 7^n \left(\frac{2^n}{7^n} + \frac{(-1)^n}{7^n} - 1 \right) = 7^n \left(\left(\frac{2}{7} \right)^n + \left(\frac{-1}{7} \right)^n - 1 \right). \quad (2)$$

Par le cours, les suites géométriques

$$\left(\left(\frac{2}{7} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\left(\frac{-1}{7} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

convergent vers 0 car $|2/7| < 1$ et $|-1/7| < 1$. Par somme, le dernier terme entre parenthèse dans (2) tend vers $-1 < 0$. Par le cours, la suite géométrique $(7^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ car $7 > 1$. D'après (2), la suite y tend vers $-\infty$, par produit.

1 pt.

On considère la fonction polynôme du second degré $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $P(x) = x(x-1) - 2x - 4 = x^2 - 3x - 4$. Son discriminant est $3^2 + 16 = 25 = 5^2 > 0$ et ses racines sont $(3 - 5)/2 = -1$ et $(3 + 5)/2 = 4$. D'après le cours, P est positive sur $[4; +\infty[$. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$, on a $P(n) \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$. On a $n! = n(n-1) \cdot (n-2)!$ avec $(n-2)! \geq n-2 \geq 2$. Donc

$$z_n \geq 2n(n-1) - 2n - 4 = n(n-1) + P(n) \geq n \quad (3)$$

car $n-1 \geq 1$. Par le cours, $\lim n = +\infty$. D'après les inégalités (3), qui sont valables à partir du rang 4, et d'après le théorème des gendarmes (une version avec un seul gendarme), la suite z tend vers $+\infty$.

1,5 pts.

Exercice 3, 2 pts :

Soit $\epsilon > 0$. On pose $N = E(1/\sqrt{3\epsilon}) + 1$, où E désigne la fonction partie entière. Comme $1/\sqrt{3\epsilon} > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. Comme $N > 1/\sqrt{3\epsilon}$, on a $n > 1/\sqrt{3\epsilon}$ donc $n^2 > 1/(3\epsilon) > 0$ et

$$\epsilon > \frac{1}{3n^2} = \left| \frac{(-1)^n}{3n^2} \right| = |u_n - 7|.$$

On a montré que u tend vers $7 \in \mathbb{R}$ donc que u converge.