Ex. 6 (TD2).

1 _ Idée de preuve :

On vérifie d'abord que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{v_n - \ell}_{\text{ce que l'on veut étudier}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(u_k - \ell)}_{\text{ça sur quoi on a une information}}.$$

On utilise la définition pour montrer que $v \to \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après $u \to \ell$, on a

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

à partir d'un rang N_0. On a, pour $n \geq N_0$

$$\frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=N_0+1}^{n} (u_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_0}^{n} |u_k - \ell| < \frac{n - N_0 + 1}{n+1} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'autre terme est

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_0} (u_k - \ell) \right| \leq \left((N_0+1) \max_{0 \leq k \leq N_0} |u_k - \ell| \right) \frac{1}{n+1}.$$

On prend $N \in \mathbb{N}$ tq. $N \geq N_0$ et

$$\left((N_0+1) \max_{0 \leq k \leq N_0} |u_k - \ell| \right) \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On doit avoir

$$|v_n - \ell| < \varepsilon$$

à partir de N.

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k - \ell = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \ell = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell). \quad (0)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u \to \ell$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} . \quad (1)$$

Soit

$$M := \max\{ |u_k - \ell| \mid k \in \mathbb{N} \cap [0; N_0] \} \cup \{1\}) > 0.$$

Soit $N = \max\left(N_0 ; E\left(\frac{2(N_0+1)M}{\varepsilon}\right) + 1\right) \in \mathbb{N}$.

On a $N \geq N_0$ et

$$N > \frac{2(N_0+1)M}{\varepsilon}$$

donc

$$\frac{\varepsilon}{2} > \frac{(N_0+1)M}{N} \geq \frac{(N_0+1)M}{N+1} . (2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. On a, par (0),

$$|v_n - \ell| = \left|\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell)\right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell|$$

et

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_0+1}^{n} |u_k - \ell|$$

$$\leq \frac{(N_0+1)M}{n+1} + \frac{n-N_0}{n+1} \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{cf. } (1))$$

$$\leq \frac{(N_0+1)M}{N+1} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{cf. } (2))$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où $|v_n - \ell| < \varepsilon$. On a montré que $\lim v = \ell$.

2 _ On adapte l'idée précédente. 3

Soit $L > 0$. On utilise $u \to +\infty$ pour trouver $N_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$u_n \geq 3L$$

à partir de N_0. On écrit, pour $n \geq N_0+1$,

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_0} u_k \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_0} |u_k| \leq \frac{N_0+1}{n+1} \underbrace{\max\{|u_k|;\ k \in \mathbb{N} \cap [0;N_0]\}}_{\substack{= M-1 \\ (M>0)}}.$$

et

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=N_0+1}^{n} u_k > \frac{n-N_0}{n+1} 3L.$$

On a $\frac{n-N_0}{n+1} = \frac{n+1-(N_0+1)}{n+1} = 1 - \frac{N_0+1}{n+1}$.

On choisit $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\frac{N_0+1}{N+1} < \frac{1}{3} \text{ et } M \frac{N_0+1}{(N+1)} < L.$$

<u>Preuve</u> : Soit $L > 0$. Comme $u \to +\infty$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \Rightarrow u_n > 3L. \quad (3)$$

On pose $M = 1 + \max\{|u_k|;\ k \in \mathbb{N} \cap [0;N_0]\}$ et

$$N = \max\left(E\left(3(N_0+1)\right)+1\ ;\ E\left(\frac{M(N_0+1)}{L}\right)+1\right).$$

Or a

$$N+1 \geq N > 3(N_0+1) \geq N_0 \text{ et } N+1 \geq N > \frac{M(N_0+1)}{L}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. On a

$$n+1 > 3(N_0+1) \text{ et } n+1 > \frac{M(N_0+1)}{L}.$$

Donc

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N_0+1}^{n} u_k$$

$$\geqslant -\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N_0} u_k\right| + \frac{n-N_0}{n+1}\,3L \qquad (\text{cf. } (3))$$

$$\geqslant -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0}|u_k| + \frac{n+1-(N_0+1)}{n+1}\,3L$$

$$\geqslant -\frac{N_0+1}{n+1}M + \left(1-\frac{N_0+1}{n+1}\right)3L$$

$$> -L + \left(1-\frac{1}{3}\right)3L = -L+2L = L.$$

On a montré que $\lim v = +\infty$.