

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur **10**, le barème est indicatif.

Sauf mention contraire explicite, toute réponse doit être justifiée.

On rappelle que $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et que l'on note par $\cos$ la fonction cosinus.

Exercice 1. : 4,5 pts. Vrai ou faux.

Sans justification, indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Attention : 0,75 pt pour une réponse correcte, -0,25 pt pour une réponse incorrecte, 0 pt pour l'absence de réponse. Note minimale à l'exercice : 0.

1. L'intervalle $[2; +\infty[$ est un voisinage de -1 .
2. L'intervalle $[2; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
3. L'ensemble $[-4; -3] \cup [2; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
4. Une suite qui n'est pas croissante est décroissante.
5. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que ses deux sous-suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ , converge vers ℓ .
6. La suite $(2n + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 2. : 4 pts.

Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes ont-elles une limite ? Si oui, la déterminer.
Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{-5n^2 + 7}{2n + 1}, \quad y_n = 7^n + (-3)^n, \quad z_n = \frac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n + 3}.$$

Exercice 3. : 1,5 pts.

Montrer, **en n'utilisant que la définition de limite ou l'une de ses formulations équivalentes**, que la suite $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{3}{n} + 2,$$

tend vers 2.

Exercice 1, 4,5 pts : 1. Fausse. 2. Vraie. 3. Vraie. 4. Fausse. 5. Vraie. 6. Vraie.

Exercice 2, 4 pts :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \frac{n^2}{n} \cdot \frac{-5 + (7/n^2)}{2 + (1/n)} = n \cdot \frac{-5 + (7/n^2)}{2 + (1/n)}.$$

Par le cours, $0 = \lim(1/n) = \lim(1/n^2)$, $2 = \lim 2$, $7 = \lim 7$, $-5 = \lim(-5)$ et $\lim n = +\infty$. Donc, par somme, $\lim 2 + (1/n) = 2 + 0 = 2 \neq 0$. Par somme et produit, $\lim -5 + (7/n^2) = -5 + 7 \cdot 0 = -5$. Donc, par quotient,

$$\lim \frac{-5 + (7/n^2)}{2 + (1/n)} = \frac{-5}{2} < 0.$$

Donc, par produit, $\lim x = -\infty$.

1,5 pts.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n = 7^n(1 + (-3/7)^n)$. Comme $|-3/7| < 1$ et $7 > 1$, $\lim(-3/7)^n = 0$ et $\lim 7^n = +\infty$, par le cours. Par le cours, $\lim 1 = 1$ donc, par somme, $\lim 1 + (-3/7)^n = 1 + 0 = 1 > 0$. Donc, par produit, $\lim y = +\infty$.

1 pt.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{1 + (\cos(n)/\sqrt{n})}{1 + (3/n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1 + (\cos(n)/\sqrt{n})}{1 + (3/n)}.$$

Par le cours, $1 = \lim 1$, $3 = \lim 3$, $\lim(1/\sqrt{n}) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $|\cos(n)| \leq 1$ donc la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Par le cours, $\lim(\cos(n)/\sqrt{n}) = 0$. Par somme, $\lim 1 + (\cos(n)/\sqrt{n}) = 1$. Par somme et produit, $\lim 1 + (3/n) = 1 \neq 0$. Donc, par quotient,

$$\lim \frac{1 + (\cos(n)/\sqrt{n})}{1 + (3/n)} = 1.$$

Donc, par produit, $\lim z = 0$.

1,5 pts.

Exercice 3, 1,5 pts :

Soit $\epsilon > 0$. On pose $N = \lfloor 3/\epsilon \rfloor + 1$. Comme $3/\epsilon > 0$, on a $N \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. On a donc $n > (3/\epsilon)$. Comme $n > 0$ et $\epsilon > 0$, on en déduit, en multipliant par ϵ/n l'inégalité précédente, que

$$\epsilon > \frac{3}{n} = \left| \left(\frac{3}{n} + 2 \right) - 2 \right|.$$

On a montré que $\lim u = 2$.