

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

L'épreuve comprend une question de cours et deux exercices indépendants. Au sein d'un exercice, on pourra répondre à une question en utilisant les résultats des questions précédentes, même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. **Sauf mention contraire explicite, toute réponse à une question doit être justifiée.**

Pour toute l'épreuve, les faits suivants pourront être utilisés **sans les justifier** :

F1 : On pourra utiliser les résultats démontrés en TD sur la fonction partie entière E .

F2 : La fonction sinus $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et à valeurs dans $[-1; 1]$.

Question de cours : 2 pts.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition de la phrase "Le réel a est un point fixe de f ".

Exercice 1. : 2 pts.

On considère la suite récurrente u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = E(u_n)$. Montrer que u tend vers une limite que l'on exprimera en fonction de u_0 .

Exercice 2. : 7 pts.

On considère la fonction $g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 1$ et, pour $x > 0$, par

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Montrer que la fonction g est continue.
2. Montrer que g tend vers 0 en $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in]A; +\infty[, \quad g(x) < 1. \tag{1}$$

4. En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(x_0) = \sup\{g(x); x \in \mathbb{R}^+\}$.

Question de cours : 2 pts.

Le réel a est un point fixe de f si $a \in D$ et $f(a) = a$.

Exercice 1, 2 pts :

Soit $p = E(u_0) \in \mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = (u_n = p)$.

Par la relation de récurrence, on a $u_1 = E(u_0) = p$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Par la relation de récurrence et l'hypothèse de récurrence, on a $u_{n+1} = E(u_n) = E(p) = p$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme u coïncide avec la suite constante égale à p à partir du rang 1, comme cette suite converge vers p par le cours, on en déduit, par le cours, que u converge vers p .

Exercice 2, 7 pts :

1. La fonction identité $\mathbb{R}^{+*} \ni x \mapsto x$ est continue (cf. cours) et ne s'annule pas. Comme la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. F2) donc sur $\mathbb{R}^{+*}$, g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, par quotient.

Comme sinus est dérivable en 0 de dérivée $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Par le cours,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Comme g coïncide sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $x \mapsto \sin(x)/x$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g = 1 = g(0)$$

donc g est continue en 0, par le cours.

2 pts.

2. Pour $x > 0$, on a, d'après F2,

$$|g(x) - 0| = \frac{|\sin(x)|}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

par le cours, on en déduit que g tend vers 0 en $+\infty$ par le théorème des gendarmes.

1,5 pts.

3. **Version 1 :** Comme $\lim_{+\infty} g = 0$, il existe $A_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (x > A_1) \implies (|g(x)| < 1). \quad (2)$$

Soit $A = |A_1| + 1 > 0$. Pour $x > A$, on a $x > A_1$ donc, d'après (2), $g(x) \leq |g(x)| < 1$.

Version 2 : On pose $A = 1$. D'après F2, on a, pour $x > 1$,

$$g(x) \leq |g(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x} \leq \frac{1}{x} < 1.$$

1,5 pts.

4. La restriction g_A de g au segment $[0; A]$ est continue (cf. 1) donc, par le cours, elle atteint sa borne supérieure. Il existe donc $x_0 \in [0; A]$ tel que

$$g(x_0) = g_A(x_0) = \sup \{g_A(x); x \in [0; A]\} = \sup \{g(x); x \in [0; A]\}.$$

En particulier, pour tout $x \in [0; A]$, on a $g(x) \leq g(x_0)$. Comme $0 \in [0; A]$, on a donc $1 = g(0) \leq g(x_0)$. Pour $x > A$, on a, par 3, $g(x) < 1 \leq g(x_0)$. Donc $g(x_0)$ est le maximum de l'ensemble

$$\{g(x); x \in \mathbb{R}^+\}$$

donc, par le cours,

$$g(x_0) = \sup \{g(x); x \in \mathbb{R}^+\}.$$

2 pts.