L2S4, Analyse 3.

Contrôle continu du 7 avril 2026, **45 min.**

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur **20**, le barème est indicatif.
Sauf mention contraire explicite, toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. : 4 pts. Questions de cours.

1. Donner la définition d'une norme N sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
2. Donner la définition d'un compact K d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Exercice 2. : 3 pts. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $S : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour

$$A := \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} \\ a_{2;1} & a_{2;2} \end{pmatrix}, \quad S(A) = \max\left\{|a_{i;j}|\,;\ (i;j) \in \{1;2\}^2\right\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice

$$M_n := \begin{pmatrix} -n^{-2} & 1 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour la norme S.
2. L'ensemble G des matrices inversibles de E est-il fermé pour la norme S ?

Exercice 3. : 14 pts. Soit $E := \mathbb{R}[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère sur E la norme N définie par, pour $P \in E$,

$$N(P) = \int_{-1}^{1} |P(t)|\,dt\,.$$

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par, pour $P \in E$,

$$f(P) = \int_{-1}^{1} t\,P(t)\,dt\,.$$

Pour $P \in E \setminus \{0\}$, on note par d_P son degré. Soit $\overline{B}(0;1)$ la boule fermée de centre 0 de rayon 1 de E.

1. Montrer que, pour tout $P \in E$, $|f(P)| \leq N(P)$.

2. En déduire que f est une application continue du $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé (E, N) vers le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère le sous-espace vectoriel de E

$$E_p \ := \ \big\{P \in E \setminus \{0\} \,;\ d_P \ \leq \ p\big\} \cup \{0\}\ .$$

   On note par B_p la boule unité fermée de E_p, c'est-à-dire $B_p = \overline{B}(0;1) \cap E_p$.
   La borne supérieure

$$\sup_{B_p} f \ := \ \sup\big\{f(P)\,;\ P \in B_p\big\}$$

   est-elle atteinte ?

4. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = (n+1)X^{2n+1}$.

   a). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \overline{B}(0;1)$ et $f(P_n) < 1$, et que $\lim f(P_n) = 1$.

   b). En déduire que la borne supérieure

$$\sup_{\overline{B}(0;1)} f \ := \ \sup\big\{f(P)\,;\ P \in \overline{B}(0;1)\big\}$$

   vaut 1.

5. Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 1$.

   a). Montrer qu'il existe un $\epsilon > 0$, $(a;b) \in [-1;1]^2$ avec $a < b$, tels que, pour tout $t \in [a;b]$, $|P(t)| \geq \epsilon$.
   (Indication : on pourra remarquer que P est non nul.)

   b). Montrer que $1 < N(P)$.

6. La borne supérieure $\sup_{\overline{B}(0;1)} f$ est-elle atteinte ?

L2S4, Analyse 3.

Corrigé du contrôle continu du 2 mars 2026.

Exercice 2, 3 pts. :

1. Soit
$$N \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Comme, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S\big(M_n - N\big) \;=\; \max\big\{0;\, n^{-2};\, n^{-1}\big\} \;\leq\; n^{-1}$$
et comme $\lim n^{-1} = 0$, la suite $(S\big(M_n - N\big))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, par le théorème des gendarmes, donc la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers N pour la norme S.
1 pt.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n \in G$ car le déterminant de M_n est $-n^{-3} \neq 0$. Si G était fermé pour la norme S alors, comme la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers N pour la norme S (cf. 1), sa limite N appartiendrait à G, d'après le cours. Or, le déterminant de N est nul donc $N \notin G$. Donc G n'est pas fermé pour la norme S.
2 pts.

Exercice 3, 14 pts. :

1. Soit $P \in E$. Comme, pour $t \in [-1; 1]$, $|t| \leq 1$, on a
$$\big|f(P)\big| \;\leq\; \int_{-1}^{1} |t|\,|P(t)|\,dt \;\leq\; \int_{-1}^{1} |P(t)|\,dt \;=\; N(P)\,.$$
0,5 pt.

2. Soit $(P; Q) \in E^2$. On a, par linéarité de l'intégrale,
$$\begin{aligned} f(P) \,-\, f(Q) \;&=\; \int_{-1}^{1} t\,P(t)\,dt \,-\, \int_{-1}^{1} t\,Q(t)\,dt \;=\; \int_{-1}^{1} t\,\big(P(t) \,-\, Q(t)\big)\,dt \\ &= f\big(P \,-\, Q\big)\,. \end{aligned}$$
D'après 1 en remplaçant P par $P - Q$, on a donc
$$\big|f(P) \,-\, f(Q)\big| \;=\; \big|f\big(P \,-\, Q\big)\big| \;\leq\; N\big(P \,-\, Q\big)\,.$$
Donc f est lipschitzienne pour N. Par le cours, f est continue pour N.
2 pts.

3. Le sous-espace E_p est de dimension $p+1$ car il est engendré par la famille

$$\left\{X^n\,;\ n\in[0;p]\cap\mathbb{N}\right\},$$

qui est libre, car extraite de la base

$$\left\{X^n\,;\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

de E. Comme la boule unité fermée B_p de E_p est bornée et E_p est de dimension finie, elle est compacte, par le cours. Comme f est continue sur E (cf. 2) donc aussi sur B_p, sa borne supérieure sur le compact B_p est atteinte, d'après le cours.
3 pts.

4. a). Soit $n\in\mathbb{N}$. On a, par parité,

$$\begin{aligned} N\big(P_n\,-\,0\big) &= N(P_n) \;=\; (n+1)\int_{-1}^{1}|t|^{2n+1}\,dt \;=\; 2(n+1)\int_0^1 t^{2n+1}\,dt \\ &= 2(n+1)\left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 \;=\; 1\,. \end{aligned}$$

Donc $P_n\in\overline{B}(0;1)$.
0,5 pt.
On a, par parité,

$$\begin{aligned} f\big(P_n\big) &= (n+1)\int_{-1}^{1}t^{2n+2}\,dt \;=\; 2(n+1)\int_0^1 t^{2n+2}\,dt \;=\; 2(n+1)\left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2n+2}{2n+3}\;<\;1\,. \end{aligned}$$

0,5 pt.
Comme

$$\frac{2n+2}{2n+3}\;=\;\frac{1\,+\,n^{-1}}{1\,+\,3(2n)^{-1}}\;\to\;1\,,$$

quand $n\to+\infty$, la suite $(f(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
0,5 pt.

b). Pour $P\in\overline{B}(0;1)$, on a, par 1, $f(P)\le|f(P)|\le N(P)\le 1$, donc 1 majore l'ensemble

$$V\;:=\;\left\{f(P)\,;\ P\in\overline{B}(0;1)\right\}.$$

Comme la suite $(f(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de V et tend vers 1, par a), $1=\sup V$ (cf. L1). Donc

$$\sup_{\overline{B}(0;1)} f\;=\;\sup\,V\;=\;1\,.$$

2 pts.

5. Soit $P\in E$ avec $f(P)=1$.

a). Si P était nul sur $[-1;1]$ alors, par définition de f, on aurait $f(P) = 0$. Contradiction. Donc il existe $t_0 \in [-1;1]$ tel que $P(t_0) \neq 0$. Soit $\epsilon = |P(t_0)|/2 > 0$. Comme P et $|\cdot|$ sont continues, $|P|$ est continue par composition. Il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour $t \in [-1;1]$ avec $|t - t_0| < \delta$, on ait

$$\big|P(t_0)\big| - \epsilon \;<\; \big|P(t)\big| \;<\; \big|P(t_0)\big| + \epsilon$$

$$\text{donc} \quad \big|P(t)\big| \;>\; \big|P(t_0)\big| - \epsilon \;=\; \epsilon\,.$$

Soit $[a;b] := [t_0 - \delta/2; t_0 + \delta/2] \cap [-1;1]$.
Si $t_0 = -1$, il existe $r > 0$ tel que $[t_0; t_0 + r[\subset [a;b]$. Si $t_0 = 1$, il existe $r > 0$ tel que $]t_0 - r; t_0] \subset [a;b]$. Enfin, si $t_0 \in]-1;1[$, il existe $r > 0$ tel que $]t_0 - r; t_0 + r[\subset [a;b]$. Dans tous les cas, $b > a$.
Sur l'intervalle $[a;b]$, on a bien $|P| \geq \epsilon$.
2 pts.

b). On a, en utilisant a) et le fait que $|t| \leq 1$, pour $t \in [-1;1]$,

$$\begin{aligned}
1 \;&=\; f(P) \;=\; \int_{-1}^{a} t\,P(t)\,dt + \int_{a}^{b} t\,P(t)\,dt + \int_{b}^{1} t\,P(t)\,dt \\
1 \;&\leq\; \left|\int_{-1}^{a} t\,P(t)\,dt\right| + \left|\int_{a}^{b} t\,P(t)\,dt\right| + \left|\int_{b}^{1} t\,P(t)\,dt\right| \\
1 \;&\leq\; \int_{-1}^{a} |t|\,\big|P(t)\big|\,dt + \int_{a}^{b} |t|\,\big|P(t)\big|\,dt + \int_{b}^{1} |t|\,\big|P(t)\big|\,dt \\
1 \;&\leq\; \int_{-1}^{a} \big|P(t)\big|\,dt + \int_{a}^{b} |t|\big|P(t)\big|\,dt + \int_{b}^{1} \big|P(t)\big|\,dt \\
1 \;&\leq\; \int_{-1}^{1} \big|P(t)\big|\,dt + \int_{a}^{b} \big(|t| - 1\big)\big|P(t)\big|\,dt \;=\; N(P) - \int_{a}^{b} \big(1 - |t|\big)\big|P(t)\big|\,dt\,.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $[a;b] \ni t \mapsto (1 - |t|)|P(t)|$ est continue, positive et non identiquement nulle (cf. a), et comme $b > a$,

$$\int_{a}^{b} \big(1 - |t|\big)\big|P(t)\big|\,dt \;>\; 0$$

donc $1 < N(P)$.
2 pts.

6. Supposons que la borne supérieure en question soit atteinte en un $P \in \overline{B}(0;1)$. D'après 4, $f(P) = 1$ donc, d'après 5, on a $N(P) > 1$. Contradiction car, comme $P \in \overline{B}(0;1)$, $N(P) \leq 1$. La borne supérieure n'est donc pas atteinte.
1 pt.