

Ex. Soit $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$(x; y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1

On montre que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

* N est bien définie car, pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 \geq 0$ et $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$. De plus, $N(0; 0) = 0$.

* Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$N(\lambda(x; y)) = N(\lambda x; \lambda y) = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| N(x; y).$$

* Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tq. $N(x; y) = 0$. Comme $\sqrt{\cdot}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bijective et $\sqrt{0} = 0$, on a, pour $t \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt{t} = 0 \Rightarrow t = 0 \quad (*)$$

Comme $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, on a, par (*), $x^2 + y^2 = 0$. Comme $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, on en déduit que $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$. D'où $|x| = \sqrt{x^2} = 0$ et $|y| = \sqrt{y^2} = 0$ et, puisque $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, $x = 0$ et $y = 0$.

* Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x'; y') \in \mathbb{R}^2$. Si $(x'; y') = 0$ alors

$$N((x; y) + (x'; y')) = N(x; y) \leq N(x; y) + 0 \leq N(x; y) + N(x'; y').$$

On suppose désormais $(x'; y') \neq 0$. Soit $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$P(t) = \left[N((x; y) + t(x'; y')) \right]^2.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$P(t) = (x + tx')^2 + (y + ty')^2 = x^2 + y^2 + 2t(xx' + yy') + (x'^2 + y'^2)t^2$$

Si P est une fonction polynomiale de degré 2 et positive, son discriminant est négatif, c'est-à-dire (2)

$$4(xx' + yy')^2 - 4(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \leq 0$$

donc, comme $\sqrt{\cdot}$ est $\nearrow$

$$|xx' + yy'| = \sqrt{(xx' + yy')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

On a donc

$$|(x; y) + (x'; y')|^2 = P(1) = x^2 + y^2 + 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2 \leq \underbrace{x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'^2 + y'^2}_{= (\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2})^2}$$

D'où, comme $\sqrt{\cdot}$ est $\nearrow$,

$$N((x; y) + (x'; y')) \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} = N(x; y) + N(x'; y').$$

On a montré que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.