Ex. 62 -

1

1). Comme les f_n sont contin et cv. unif. vers f sur I, f est contin. sur I, par le cours.

Comme $u_n \to \ell \in I$ et f est contin en ℓ, $f(u_n) \to f(\ell)$, par le cours.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(u_n) \to f(\ell)$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tq.

$$n \geq N_1 \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Comme $f_n \to f$ unif. sur I, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tq.

$$n \geq N_2 \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2).$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. On a

$$|f_n(u_n) - f(\ell)| = |f_n(u_n) - f(u_n) + f(u_n) - f(\ell)|$$

donc, par l'inég. triangl.,

$$|f_n(u_n) - f(\ell)| \leq |f_n(u_n) - f(u_n)| + |f(u_n) - f(\ell)|$$

$$\underset{(3)}{\leq} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + |f(u_n) - f(\ell)|.$$

Comme $n \geq N \geq N_1$, on a, par (1),

$$|f(u_n) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Comme $n \geq N \geq N_2$, on a, par (2),

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Donc, par (3),

$$|f_n(u_n) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) = f(\ell)$.

2) On a $(f_n(0))_n = 0 = (f_n(1))_n$ donc elles cv. vers 0, Soit $x \in]0,1[$, On a

$$f_n(x) = \frac{n}{e^{-n\ln(x)}}(1-x).$$

Comme $-\ln(x) > 0$, on a, par croiss. comparée,

$$\frac{n}{e^{n(-\ln(x))}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par produit.

On supp. que $(f_n)_n$ cv. vers 0 unif. sur I.

On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \in I.$$

D'après le 1), $f_n(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1) \underset{(*)}{=} 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(u_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

$$= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(\underbrace{-1 + o(1)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -1}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} \neq 0 \,!$$

Car exp est conti en -1

Contr. avec (*). Donc $(f_n)_n$ ne cv. pas vers 0 unif. sur $[0,1]$.

Ex. 77.

1et2. Comme $\sum |f_n(0)|$ est la série nulle elle cv. vers 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$|f_n(x)| = |x| \times \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

qui est une suite géom. de raison $0 \leq \frac{1}{1+x^2} < 1$. Donc $\sum |f_n(x)|$ cv.

Par le incs sur les séries, $\sum f_n(x)$ cv. pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{(1+|x|^2)^n}.$$

Comme cette fonct. est paire

$$\sup |f_n| = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)|.$$

Pour $x \geq 0$,

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(1+x^2)^n} \geq 0.$$

C'est une fonct. dérivable de dérivée

$$|f_n|'(x) = \frac{(1+x^2)^n - x\, n\,(1+x^2)^{n-1}\, 2x}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{1+x^2-2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Ces variations sont donc

	0		$1/\sqrt{2n-1}$	
	0	$\nearrow$		$\searrow$

Donc :

$$\sup |f_n| = \left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) \right|.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \exp\left(-n \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}} \exp\left(\frac{-1}{2-\frac{1}{n}} - n\, o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

donc

$$\sqrt{n}\, \sup |f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) > 0,$$

Donc $\sup |f_n| \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$

qui est le terme général 6

d'une série de Riemann divergente.

Donc $\sum_n \sup|f_n|$ div. (cf. séries positives)

La cv. n'est donc pas normale.

4). Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Comme

$\left|\frac{-1}{1+x^2}\right| < 1$, on a, par les prop. des

séries géom.,

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(x) = x \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} x \frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}}$$

De plus

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(0) = 0 = 0 \times \frac{1}{1+\frac{1}{1+0^2}}$$

Donc $\sum f_n$ cv. simpl. sur $\mathbb{R}$ vers

la fonct. $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x \frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme les f_n et S sont

impaires, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - S(x)\right| = \sup_{x \geq 0} \left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - S(x)\right|, (*)$$

Soit $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$$x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

Soit $x > 0$. $(u_n(x)) \downarrow$ et tend vers 0 (cf. prop. des suites géom.), avec $1+x^2 > 0$).

On a $(u_n(0))_n = 0$ donc elle est aussi positive, $\downarrow$ et tend vers 0.

De plus, pour $x \geq 0$,
$$f_n(x) = (-1)^n u_n(x).$$

À $x \geq 0$ fixé, on peut appliquer l'ex. 76 qui donne
$$\left| \sum_{k=0}^{N} f_n(x) - S(x) \right| \leq u_{n+1}(x). \quad (**)$$

D'après le calcul en 3, on a
$$\sup_{x \geq 0} u_{n+1}(x) = u_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2(n+1)-1}}\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n+1}}, \text{ pour un } C > 0.$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$,

$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} U_{n+1}(x) \longrightarrow 0$.

D'après (*), (**) et le Th. des gendarmes,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - S(x) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

La cv. de $\sum f_n$ vers S est donc unif. sur $\mathbb{R}$.