Exercice sur les angles.

Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\varphi(x) = \exp(ix)$. On a vu dans le cours que φ est bien définie (i.e. à valeurs dans $\mathbb{S}^1$). On définit les fonctions cosinus et sinus par $\cos(x) = \Re(\varphi(x))$ et $\sin(x) = \Im(\varphi(x))$, pour $x \in \mathbb{R}$. Pour $b \in \mathbb{R}$, on note par $b\mathbb{Z}$ le sous-groupe de $(\mathbb{R}; +)$ constitué des nb, pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que φ et la fonction $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, définie par $\overline{\varphi}(x) = \exp(-ix)$, sont de classe C^1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = i\varphi(x)$. En déduire que cos et sin sont aussi de classe C^1, que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$, et que φ n'est pas la fonction constante égale à 1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}$.
2. Montrer que φ est un morphisme de groupe, du groupe $(\mathbb{R}; +)$ dans le groupe $(\mathbb{S}^1; \times)$. Soit $K = \varphi^{-1}(1)$ son noyau et $a = \inf(K \cap \mathbb{R}^{+*}) \geq 0$.
3. On suppose que $a = 0$.
   a). Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $K \cap]y - \epsilon; y + \epsilon[\neq \emptyset$. (Indication : on pourra montrer l'existence d'un $b \in]0; \epsilon[\cap K$ et effectuer la division euclidienne de y par b.)
   b). Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K qui converge vers y.
   c). Montrer que $\varphi(y) = 1$.
   d). En déduire une contradiction.
4. Par la question précédente, on sait que $a > 0$.
   a). Montrer que $\varphi(a) = 1$.
   b). En déduire que $a\mathbb{Z} \subset K$.
   c). Montrer par l'absurde que $K \subset a\mathbb{Z}$. (Indication : on pourra utiliser la division euclidienne par a.)
5. Par les questions précédentes, on sait que $K = a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$. On verra plus loin que $a = 2\pi$, où π est le rapport de la circomférence d'un cercle à son diamètre.
   a). Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ données par $z^2 = 1$ et $z^2 = -1$.
   b). En déduire que $\varphi(a/2) = -1$ et $\varphi(a/4) \in \{-i; i\}$.
   c). On suppose qu'il existe $x \in]0; a/2[$ tel que $\sin(x) = 0$. Montrer qu'alors $\varphi(x) \in \{-1; 1\}$. En déduire une contradiction.
   d). Montrer que sin est strictement positive sur $]0; a/2[$. En déduire que $\varphi(a/4) = i$.
   e). Montrer que l'image $\cos([0; a/4])$ de l'intervalle $[0; a/4]$ par la fonction cos est l'intervalle $[0; 1]$.
6. On montre dans cette question que φ est surjective.
   a). Soit $z \in \mathbb{S}^1$. Montrer que z, $\overline{z}$, $-z$ ou $-\overline{z}$ a ses parties réelle et imaginaire positives.
   b). Soit $z \in \mathbb{S}^1$ ayant des parties réelle et imaginaire positives. Montrer que $z \in \varphi([0; a/4])$.
   c). En déduire que $\mathbb{S}^1 = \varphi(]-a/2; a/2])$. Vérifier que la restriction de φ à l'intervalle $]-a/2; a/2]$ est injective.
7. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in a\mathbb{Z}$. On note par $\mathrm{cl}(x)$ la classe de $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble des classes est noté $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$. On admet que c'est un groupe commutatif pour l'addition construite à partir de celle de $\mathbb{R}$ et

que l'application $\psi : \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, donnée par $\psi(\mathrm{cl}(x)) = \varphi(x)$, est bien définie. Vérifier que ψ est un isomorphisme de groupes.

8. Détermination de a. On rappelle que la longueur de l'image $\mathrm{Im}\gamma$ d'une courbe paramétrée $\gamma :]t_0; t_1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, avec $t_0 < t_1$, donnée par $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ et de classe C^1, est

$$L(\mathrm{Im}\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt .$$

a). Montrer que $\mathbb{S}^1$ est l'image d'une courbe paramétrée injective de classe C^1. Calculer sa longueur en fonction de a.

b). Montrer que le rapport de la circomférence d'un cercle à son diamètre est $a/2$. **Par définition de π, on a donc $a = 2\pi$.**

Commentaire : Les applications φ et ψ ci-dessus donnent une réalisation analytique des notions géométriques d'angle orienté de demi-droites et de mesure d'angle. Pour $z \in \mathbb{S}^1$, l'angle orienté des demi-droites $[0; z)$ et $[0; 1)$ du plan complexe est identifié à l'unique $\theta \in \mathbb{R}/a\mathbb{Z} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\psi(\theta) = z$. Les réels constituant la classe θ sont les mesures de l'angle θ. Elles diffèrent les unes des autres d'un multiple entier de 2π.