Ex. 3 (feuille suppl.).

1 – Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $Q(n) = \left(f_0^{(p)} = 0 \right)$. Comme f_0 est cte, $f_0' = 0$ et $Q(1)$ est vraie. Supp. $Q(p)$ vrai, pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $f_0^{(p)} = 0$. Donc sa dérivée $f_0^{(p+1)} = 0$. Donc $Q(p+1)$ est vraie. Par le th. de récurrence, $Q(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 1 = f_0(x)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [2; +\infty[$, $f_1^{(n)} = f_0^{(n-1)} = 0$ d'après ce qui précède. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = 2(x-a)$ et $f_2''(x) = 2 = 2 f_0(x)$. Donc, pour $n \in \mathbb{N} \cap [3; +\infty[$,

$$f_2^{(n)} = f_0^{(n-2)} = 0.$$

2 – Comme $Q(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $f_0^{(p)} = 0$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ donc $b)_0$ est vraie. De plus, $f_0^{(0)} = f_0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0^{(0)}(x) = 1 = \frac{0!}{0!}(x-a)^0$.

Donc $a)_0$ est vraie. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

3 – Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N} \cap [(n+1)+1; +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}'(x) = (n+1)(x-a)^n = (n+1) f_n(x)$.

Donc $f_{n+1}^{(p)} = (n+1) f_n^{(p-1)}$. Or $p - 1 \geq n+1$ donc, par hyp. de récurrence, $f_n^{(p-1)} = 0$ donc $f_{n+1}^{(p)} = 0$. Donc $b)_{n+1}$ est vraie.

Soit $p \in \mathbb{N} \cap [0; n+1]$. Comme $f_{n+1}' = (n+1) f_n$, $f_{n+1}^{(p)} = f_n^{(p-1)} \times (n+1)$.

Comme $p - 1 \leq n$, on a, par hyp. de récurrence, que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}^{(p)}(x) = (n+1) f_n^{(p-1)}(x) = (n+1) \times \frac{n!\,(x-a)^{n-(p-1)}}{(n-(p-1))!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-p)!}(x-a)^{(n+1)-p}.$$

Donc $a)_{n+1}$ est vraie. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Ex. 4 (feuille suppl.)

Soit $\mathcal{E} = \{ g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \,;\, \exists (c_-; c_+) \in \mathbb{R}^2 ; g_{|\mathbb{R}^{+*}} = c_+ \text{ et } g_{|\mathbb{R}^{-*}} = c_- \}$.

On montre que $\mathcal{E} = \{ F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \,;\, F \text{ est dérivable et } F' = f \}$.

Soit $g \in \mathcal{E}$. Il existe $(c_-; c_+) \in \mathbb{R}^2$; $g_{|\mathbb{R}^{*\pm}} = c_{\pm}$.

Comme g est constante sur $\mathbb{R}^{*\pm}$, elle y est dérivable de dérivée nulle. Donc $g'_{|\mathbb{R}^{*\pm}} = 0$ et $g' = f$.

Donc $g \in \mathcal{E}$.

Soit $F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$. Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{*\pm}$, $F' = 0$ donc ; par le L1 S1, elle est constante sur cet intervalle. Il existe donc $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ t.q. $F_{|\mathbb{R}^{*\pm}} = c_{\pm}$.

Donc $F \in \mathcal{E}$.

On a montré que $\mathcal{E} = \{ F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \,;\, F \text{ est dérivable et } F' = f \}$.

À cause de ce phénomène, on cherchera les primitives sur ~~des~~ intervalle.

Ex. 1 (feuille suppl.)

1. Sur $]0;1]$, les fonct. F et G sont obtenues par produit, composition et passage à l'inverse par des fonct. de classe C^1. Elles sont donc dérivables par le L1 S1. De plus,

$$\forall x \in]0;1], \quad F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)(-2)x^{-3} = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. Pour $x \in]0;1]$, on a

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{G(x) - G(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

Comme $\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$ et $\left| x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x|$ et comme $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

on a, par le th. des gendarmes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{G(x)-G(0)}{x} = 0.$$

Donc F et G sont dérivables en 0 de dérivée nulle.

3_ D'après les réponses de 1 et 2, F' est la fonct. f.

4_ Supposons que $l = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

On a vu que $\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = l$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{1}{2n\pi} \in]0;1]$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \in]0;1]$

On a $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to\infty} v_n$. Donc, par composition,

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = l = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

et $\cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

D'où $l = 0 = 1$. Contr. Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ n'existe pas.

5_ Par les réponses 1 et 2, G' est la fonct. g.

6_ On suppose qu'il existe $M>0$ t.q.

$$\forall x\in[0;1],\ |g(x)| \leq M.$$

On a, pour $x \in]0;1]$,

$$\left|\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| = \left|g(x) - 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq |g(x)| + \left|2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq M+2.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $w_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \in]0;1]$. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$M+2 \geq \left|\frac{2}{1/\sqrt{2n\pi}}\cos\left(\frac{1}{1/2n\pi}\right)\right| = 2\sqrt{2\pi}\times\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

Contradiction, par passage à la limite ds les inégalités.

Donc g n'est pas bornée.

2.1.

Ex. 2.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = e^x(x^4+4x^3), \quad f_1''(x) = e^x(x^4+4x^3+4x^3+12x^2).$$

$$f_2'(x) = 3x^2 + \cos(x), \quad f_2''(x) = 6x - \sin(x).$$

$$f_3'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad f_3''(x) = \frac{2(x^2+1)-(2x)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$f_4'(x) = e^{2x}\left(2\cos(x) - \frac{2}{x^2+1} - \sin(x) + (x^2+1)^{-2} \times 2x\right)$$

$$f_4''(x) = e^{2x}\Big(4\cos(x) - \frac{4}{x^2+1} - 2\sin(x) + \frac{4x}{(x^2+1)^2} - 2\sin(x) + \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \cos(x)$$
$$+ 2(x^2+1)^{-2} + 2x(-2)(x^2+1)^{-3} \times 2x\Big).$$

$$f_5'(x) = g'(x^3) \times 3x^2, \quad f_5''(x) = g''(x^3)\, 9x^4 + g'(x^3) \times 6x.$$

$$f_6'(x) = \frac{2g(x)g'(x)}{g(x)^2+1}, \quad f_6''(x) = \frac{2\left(g'(x)^2 + g(x)g''(x)\right)\left(g(x)^2+1\right) - \left[2g(x)g'(x)\right]^2}{\left(g(x)^2+1\right)^2},$$

$$f_7'(x) = g'(g(x))\,g'(x), \quad f_7''(x) = g''(g(x))\left(g'(x)\right)^2 + g'(g(x))\,g''(x).$$

Ex. 2.2. Dans cet exercice, on suppose connue la dérivabilité de sinus et cosinus.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = e^{x\,\mathrm{Re}(\alpha)}\left(\cos(x\,\mathrm{Im}\,\alpha) + i\sin(x\,\mathrm{Im}\,\alpha)\right)$.

Les parties réelle et imaginaire de f_α sont dérivables comme produit de fonct. dérivables. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x\,\mathrm{Re}(\alpha)}\cos(x\,\mathrm{Im}\,\alpha)\right) = e^{x\,\mathrm{Re}(\alpha)}\left(\mathrm{Re}(\alpha)\cos(x\,\mathrm{Im}(\alpha)) - \sin(x\,\mathrm{Im}(\alpha))\,\mathrm{Im}(\alpha)\right)$$

et

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x\,\mathrm{Re}(\alpha)}\sin(x\,\mathrm{Im}\,\alpha)\right) = e^{x\,\mathrm{Re}(\alpha)}\left(\mathrm{Re}(\alpha)\sin(x\,\mathrm{Im}(\alpha)) + \cos(x\,\mathrm{Im}(\alpha))\,\mathrm{Im}(\alpha)\right).$$

Donc, par somme, f_α est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha'(x) = e^{x\,\mathrm{Re}(\alpha)}\left[\mathrm{Re}(\alpha)\cos(x\,\mathrm{Im}(\alpha)) - \sin(x\,\mathrm{Im}(\alpha))\,\mathrm{Im}(\alpha) + i\,\mathrm{Re}(\alpha)\sin(x\,\mathrm{Im}(\alpha)) + i\cos(x\,\mathrm{Im}(\alpha))\,\mathrm{Im}(\alpha)\right]$$
$$= e^{x\,\mathrm{Re}(\alpha)}\,\alpha \times \left(\cos(x\,\mathrm{Im}(\alpha)) + i\sin(x\,\mathrm{Im}(\alpha))\right) = \alpha e^{\alpha x}.$$