Calculus 10.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre.

Rappels : – une équation différentielle du premier ordre est une équation dont l'inconnue est une fonct. $y : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) dérivable (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) l'éq. faisant intervenir y et/ou y'

– résoudre une telle équation consiste à déterminer l'ensemble des sol. de l'éq. Comme on l'a vu plusieurs fois, il y a deux étapes à faire (même si, parfois, on peut les faire en parallèle).

– Le cours se concentre sur les éq. diff. du 1er ordre du type

$$y' = F(t;y)$$ où $y : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est l'inconnue ($I \subset J$)

et $F : J \times \mathbb{R}(\text{ou}\,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}(\text{ou}\,\mathbb{C})$, J int. de $\mathbb{R}$
$(t;x) \longmapsto F(t;x)$

est "linéaire par rapport à la 2ème variable" c'est-à-dire

$\forall t \in J, \forall (x;x') \in \mathbb{R}^2(\text{ou}\,\mathbb{C}^2), \forall \lambda \in \mathbb{R}(\text{ou}\,\mathbb{C}),\ F(t;\lambda x + x') = \lambda F(t;x) + F(t;x')$.

– Dans la feuille suppl., les exercices 36 et 37 traitent de cas simples d'éq. diffé. du 1er ordre non-linéaires. Elles sont hors programme mais instructives.

– Dans le cadre du cours, il retient deux choses importantes :

* si l'éq. est définie sur un int. J de $\mathbb{R}$, les sol. sont aussi définies sur J (i.e. $I = J$),
* Le cours donne une caractérisation de l'ens. des sol. (donc il fait les "deux sens" mentionnés plus haut) mais en laissant un calcul (de primitives) à faire pour déterminer explicitement l'ens. des sol.

– Si l'on demande de résoudre une éq. diff. lin. du 1er ordre, la réponse doit être un ens. de sol. et elle doit être justifiée.

Conseils de résolution :

Soit à résoudre l'éq. $y' = y$ sur $\mathbb{R}$ (i.e. $J = \mathbb{R}$), où K restreint aux sols. réelles (i.e. $y : J \to \mathbb{R}$).

Méthode éveillée :

C'est une éq. diffé. lin. du 1er ordre du type étudié dans le Cours ! Donc les résultats du cours à ce sujet s'appliquent. L'éq. étant "sans second membre", l'ens. des sol. est, par le cours, l'ens.

$$\{ k y_0 \,;\, k \in \mathbb{R} \}$$

où $y_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{\int_0^t ds} = e^t \end{array}$.

Méthode déconseillée !

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = y(t)$

donc $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = 1$ d'où $\dfrac{d}{dt}\left(\ln|y(t)|\right) = 1$,

D'où $\ln|y(t)| = t + K$

et $|y(t)| = e^{t+K}$

donc $y(t) = -e^{t+K}$ ou $y(t) = e^{t+K}$.

Deux défauts : * Ce qui précède n'est pas valide pour $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}$ qui est pourtant sol.

* Même si l'on cherche une sol. non nulle, on ne sait pas à l'avance (sauf à utiliser le cours) qu'une telle solution ne s'annule pas. On ne peut donc pas justifier le calcul précédent (sauf à utiliser le cours).

* On a traité qu'un "sens" de la résolution.

Cela dit, on peut justifier proprement la méthode déconseillée mais cela nécessite un résultat difficile qui sera vu au mieux en L3.

En regardant le cours, on verra que, même si la méthode déconseillée peut aider à deviner les sol., elle n'a pas été utilisée pour la preuve de la résolution.

Résolution sur un intervalle : lorsqu'une éq. diff. est définie sur une réunion d'intervalles, on résoud séparément sur chaque intervalle.

Exemple : on considère l'éq. diff. liné. du 1er ordre $y'=0$ sur $\mathbb{R}^*$. La résoudre sur $\mathbb{R}^*$ revient à faire l'exercice 4 (feuille suppl.). L'ens. des sol. n'est pas

$$\{ f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} ;\ \exists c \in \mathbb{R} ;\ f \text{ est constante égale à } c \}$$

mais

$$\{ f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} ;\ \exists c_- \in \mathbb{R}, \exists c_+ \in \mathbb{R} ;\ f \text{ est constante égale à } c_+ \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \text{ et } c_- \text{ sur } \mathbb{R}^{*-} \}.$$

On voit qu'il est préférable de résoudre séparément sur les intervalles $\mathbb{R}^{*-}$ et $\mathbb{R}^{*+}$.

Quelques résolutions basiques :

→ À résoudre $y'=y$ sur $\mathbb{R}$. (sol. réelles).

* On applique le cours : par le cours l'ens. des sol. est $\{ky_0 ; k \in \mathbb{R}\}$ où $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{\int_0^t 1 ds} = e^t$.

* On peut aussi remarquer que $y_0 : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^t$ est une sol. non nulle et comme l'ens. des sol. est une dte c'est forcément $\mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(y_0) = \{ky_0 ; k \in \mathbb{R}\}$.

→ À résoudre sur $\mathbb{R}$ (sol. réelles), $y' = x^2$ (il est sous-entendu que x est la variable de y). L'ens. des sol. est bien sûr l'ens. des primitives de la fonct. $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^2$ c'est-à-dire

$$\left\{ x \longmapsto \frac{x^3}{3} + k \,;\, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

→ À résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' = i$ (on cherche les sol. complexes !!). L'ensemble des sol. est l'ens. des primitives de la fonct. $\mathbb{R} \ni x \longmapsto i$ soit $\{ x \longmapsto ix + k \,;\, k \in \mathbb{C} \}$.

3.1. Sauf mention contraire, on cherche les sol. réelles.

3.1. L'éq. n'est pas exactement du type de celles étudiées dans le cours mais, comme $I \ni x \longmapsto 1+x^2$ ne s'annule pas, on a, sur I,

$$\underbrace{(1+x^2)y' - 2xy = 1-x^2}_{(E')} \iff \underbrace{y' - \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{1-x^2}{1+x^2}}_{(E)}.$$

L'éq. (E) est bien une éq. diff. lin. du 1er ordre "normale" (le type étudié dans le cours). On peut donc lui appliquer les résultat du cours et donc aussi à (E') d'après l'équivalence précédente.

Par le cours, l'ens. des sol. de l'éq. (E_0) sans second membre associée à (E) est

$$\mathcal{S}_0 = \{ k y_0 \,;\, k \in \mathbb{R} \}$$

où $y_0 : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt} \end{array}$.

On a $\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$ où $\varphi(t) = 1+t^2$ est C^1 donc, par chang. de var., $\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{du}{u} = \ln|\varphi(x)| - \ln|\varphi(0)| = \ln(1+x^2)$.

Donc $y_0(x) = 1+x^2$.

Par le cours, l'ens. des sol. de (E) (donc de (E')) est $\mathcal{S} = \{z + y \,;\, y \in \mathcal{S}_0\}$ où z est une sol. (parti.) de (E).

Tous les moyens sont bons pour trouver une sol. z de (E) mais le cours donne une méthode presque infaillible : la méthode de "variation des constantes" : on cherche z sous la forme $z = u \times y_0$ (on remplace la cte k dans un élé. ky_0 de $\mathcal{S}_0$ par une fonction u, "on fait varier la constante k"). On a :

$$z \in \mathcal{S} \iff \forall x \in I, \quad u'(x)y_0(x) + u(x)y_0'(x) - 2x\,u(x)y_0(x) = 1 - x^2$$

$$\iff \forall x \in I, \quad u'(x)y_0(x) + u(x)\underbrace{\left[y_0'(x) - 2y_0(x)\right]}_{=0 \text{ ! car } y_0 \in \mathcal{S}_0} = 1 - x^2$$

$$\iff \forall x \in I, \quad u'(x)(1+x^2) = 1 - x^2$$

$$\iff \forall x \in I, \quad u'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad (*)$$

car $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas. On a besoin d'une primitive de $F : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$. C'est une fonct. fraction rationnelle. Pour $x \in I$, on a $F(x) = -\frac{x^2-1}{x^2+1} = -\frac{x^2+1-2}{x^2+1} = -1 + \frac{2}{x^2+1}$ (décomp. en élé. simples sur $\mathbb{R}$!). Donc, pour $x \in I$, on pose

$u(x) = \int_0^x \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = -x + 2\,\mathrm{Arctan}(x)$; $(*)$ est valable donc par les équiv. $z : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto u(x)y_0(x) = (2\,\mathrm{Arctan}(x) - x)(1+x^2) \end{array}$

est sol. de (E).

3.2 – Soit (E) l'éq. diff. à résoudre. Elle est du type étudié dans le cours. Par le cours, l'ens. $\mathcal{S}_0$ des sol. de l'éq. (E₀) sans second memb. associée est

$\mathcal{S}_0 = \{k y_0 ; k \in \mathbb{R}\}$ où

$$y_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{\int_1^x \frac{t-1}{t} dt}.$$

Pour $x \in I$, on a,

$$\int_1^x \frac{t-1}{t} dt = \int_1^x dt - \int_1^x \frac{dt}{t} = x - 1 - \ln x.$$

Donc, pour $x \in I$, $y_0(x) = \frac{e^{x-1}}{x} = \frac{e^x}{xe}$.

Rq. : $\mathcal{S}_0 = \{k \tilde{y}_0 ; k \in \mathbb{R}\}$ où $\tilde{y}_0(x) = \frac{e^x}{x}$.

L'ens. $\mathcal{S}$ des sol. de (E) est $\{z + y ; y \in \mathcal{S}_0\}$ où z est une sol. de (E).

On cherche z sous la forme $u \times \tilde{y}_0$.

$z \in \mathcal{S} \iff \forall x \in I, \; u'(x)\tilde{y}_0(x) + u(x)\tilde{y}_0'(x) + u(x)\tilde{y}_0(x)\frac{x-1}{x} = x^2$

$\iff \forall x \in I, \; u'(x)\tilde{y}_0(x) + u(x)\underbrace{\left[\tilde{y}_0'(x) + \tilde{y}_0(x)\frac{x-1}{x}\right]}_{=0 \text{ car } \tilde{y}_0 \in \mathcal{S}_0} = x^2$

$\iff \forall x \in I, \; u'(x)\frac{e^x}{x} = x^2$

$\iff \forall x \in I, \; u'(x) = x^3 e^{-x} \quad (*)$

car e^x et x ne s'annulent pas sur I.

On a besoin d'une primitive de $x \mapsto x^3 e^{-x}$ sur I.

On peut prendre la restriction à I d'une primitive sur $\mathbb{R}$.

Soit $F(x) = \int_0^x t^3 e^{-t} dt$.

$u = F$ sur I convient pour avoir $(*)$. Donc $z = F \times \tilde{y}_0$ est sol. de (E).

Détermination explicite de F :

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x t^3 \left(\frac{e^{-t}}{-1}\right)' dt \overset{\text{IPP}}{=} \left[-t^3 e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x 3t^2 \frac{e^{-t}}{-1} dt = -x^3 e^{-x} + 3\int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

$$= -x^3 e^{-x} + 3\left(\left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x 2t \frac{e^{-t}}{-1} dt\right) = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6\int_0^x t e^{-t} dt$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6\left(\left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-t}}{-1} dt\right) = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} + 6\left[\frac{e^{-t}}{-1}\right]_0^x$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + 1 = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + 6.$$

3.3. Dans cette question, on résout le "problème de Cauchy en $(0;2)$" par l'éq. (E) : $y' + 2xy = 2x$ sur $I \subset \mathbb{R}$ avec $0 \in I$.
C'est-à-dire qu'on cherche parmi les sol. de l'éq. (E) celle(s) vérifiant en plus $y(0)=2$.
Pour ce faire, on résout d'abord (E) puis on ajoute la condition $y(0)=2$.
L'éq. (E) est du type étudié dans le cours. Dans $\mathcal{S}_0$ des sol. de l'éq. (E_0) sans second membre associée est

$$\{k y_0 ; k \in \mathbb{R}\}$$

où $y_0 : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\int_0^x 2t\,dt} = e^{-x^2} \end{array}$.

L'ens. $\mathcal{S}$ des sol. de (E) est $\{z+y ; y \in \mathcal{S}_0\}$ où z est une sol. de (E). On s'aperçoit que la fonction $z : I \ni x \mapsto 1$ est sol. de (E). (Si l'on ne voit pas cela, on peut toujours utiliser la méthode variation de la constante).

Donc

$$\mathcal{S} = \{ I \ni x \xrightarrow{y_k} 1 + k e^{-x^2} ; k \in \mathbb{R}\}.$$

On a donc

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} \forall x \in I,\ y'(x) + 2xy(x) = 2x \\ \text{et} \\ y(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R};\ y = y_k \\ \text{et} \\ y_k(0) = 2 \end{cases}.$$

or

$$y_k(0) = 2 \iff 1 + k e^{-0^2} = 2 \iff k = 1.$$

Donc

$$(\mathcal{C}) \iff y = y_1$$

et le pb. de Cauchy a une unique solution.

3.4. C'est encore un problème de Cauchy, cette fois en $(1;1)$. L'éq. (E) donnée par $\sqrt{1+x^2}\,y' - y = 0$ sur $I \subset \mathbb{R}$ avec $1 \in I$ est équiv. à $y' - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ sur I (puisque $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ ne s'annule pas) qui est une éq. diff. du type étudié dans le cours et sans second membre. Son ens. $\mathcal{S}$ de sol. est donc

$$\mathcal{S} = \{ k y_0 ;\ k \in \mathbb{R} \}$$

où $y_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}} = e^{\operatorname{Argsh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$.

(cf. ex. 2 (feuille suppl.)). On a

$$(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x^2}\,y' - y = 0 \\ \text{et} \\ y(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R},\ y = k y_0 \\ \text{et} \\ k y_0(1) = 1. \end{cases}$$

or $k y_0(1) = 1 \Leftrightarrow k(1+\sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ donc

$$(\mathcal{C}) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} y_0 .$$

Là encore, le pb. de Cauchy a une sol. unique.

Ex. 33 (feuille suppl.).

1. Comme a et f sont cont., qui l'est aussi. Donc leurs primitives sont C^1. Par composition et produit g est C^1. De plus, pour $t \geq 0$,

$$g'(t) = e^{-\int_0^t a(s)\,ds} \left[-a(t) \int_0^t a(s) f(s)\,ds + a(t) f(t) \right]$$

$$= \underbrace{a(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds}}_{\geq 0} \underbrace{\left[f(t) - \int_0^t a(s) f(s)\,ds \right]}_{\leq f(0)} \leq a(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} f(0).$$

De plus,
$$\frac{d}{dt}\left(-e^{-\int_0^t a(s)ds}\right) = -e^{-\int_0^t a(s)ds} \times (-a(t)) = a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}$$

donc
$$g'(t) \leq f(0) \times \frac{d}{dt}\left(-e^{-\int_0^t a(s)ds}\right).$$

2- Par (11), on a, par intégration,
$$g(x)-g(0) = \int_0^x g'(t)dt \leq \underbrace{\int_0^x f(0) \frac{d}{dt}\left(-e^{-\int_0^t a(s)ds}\right)dt}$$
$$= -f(0)\left[e^{-\int_0^t a(s)ds}\right]_0^x$$
$$= -f(0)\left(e^{-\int_0^x a(s)ds} - 1\right)$$

donc, comme $g(0)=0$,
$$g(x) \leq f(0)\left(1 - e^{-\int_0^x a(s)ds}\right).$$

3- Pour $t \geq 0$, on a, par (9),
$$f(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} \leq f(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} + g(t)$$

donc, par (12),
$$f(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} \leq f(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} + f(0)\left(1 - e^{-\int_0^t a(s)ds}\right) = f(0).$$

D'où,
$$f(t) \leq f(0)e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

4- Par intégration de (13), on a, pour $x \geq 0$,
$$h(x)-h(0) = \int_0^x h'(t)dt \leq \int_0^x a(t)h(t)dt$$
soit
$$h(x) \leq h(0) + \int_0^x a(s)h(t)dt$$
c'est-à-dire (9), et h est bien nulle.

Donc, par (10),

$\forall t \geq 0, \quad h(t) \leq h(0) e^{\int_0^t a(s)\,ds}$.

Ex. 34 (feuille suppl.) Appl. du Lemme de Gronwall (de l'ex. 33).

1 - h_n est un polyn. donc est de classe C^∞.

2 - Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$h_n'(t) = (n+1)(n+1+t)^n \leq (n+1+t) \times (n+1+t)^n = h_n(t)$.

3 - Par le 4. de l'ex. 33 avec a constante égale à 1 (donc continue),

$\forall t \geq 0, \quad h_n(t) \leq h_n(0) e^{\int_0^t 1\,ds} = (n+1)^{n+1} e^t$.

4 - Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on a $t \leq n+1+t$ donc

$t^{n+1} \leq (n+1+t)^{n+1} = h_n(t) \leq (n+1)^{n+1} e^t$.

5 - Pour $t \geq 1$, on a, par 4

$0 \leq t^n e^{-t} = t^{n+1} \underbrace{\frac{e^{-t}}{t}}_{\geq 0} \leq (n+1)^{n+1} e^t \times \frac{e^{-t}}{t} = \frac{(n+1)^{n+1}}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Donc, par comparaison, $\lim_{t \to +\infty} t^n e^{-t}$ existe et vaut 0,