Calculus 11.

Problèmes de "raccord".

Les équations différentielles étudiées jusqu'à présent étaient équivalentes à une équation du type de celles traitées dans le cours. Ce n'est pas le cas dans l'exemple suivant sur $\mathbb{R}$:

$$xy' = y. \qquad (*)$$

Comme la fonction $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x$ s'annule, on ne peut se ramener globalement à une équation du type étudié dans le cours. Cependant, on peut le faire sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, sur de tels intervalles, le cours dit qu'il y a une droite de solutions. Peut-on "raccorder" ces solutions pour obtenir une solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}$?

On va traiter ce problème de "raccord" sur des exemples seulement. Dans les cas traités, on déterminera l'ensemble des solutions de l'équation. Pour ce faire, on procédera de la manière suivante : on suppose d'abord qu'on a une solution et on tire le maximum de renseignements à son sujet pour deviner l'ensemble des solutions ; ensuite on montre que l'ensemble trouvé est bien l'ensemble des solutions.

Voyons cela dans le cas de l'équation $(*)$. Soit $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de $(*)$. C'est donc une fonct. dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x y_0'(x) = y_0(x).$$

En particulier, y_0 est une solution de $(*)$ sur $]0;+\infty[$. Mais, sur $]0;+\infty[$, l'équation $(*)$ est équivalente à

$$y' = \frac{1}{x} y \qquad (**)$$

et le cours nous dit que l'ensemble des sol. est $\{k y_+ ; k \in \mathbb{R}\}$

où $y_+ :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{\int_1^x \frac{dt}{t}} = e^{\ln(x)} = x$.

Comme y_0 est solution de (**) sur $]0;+\infty[$, il existe $k_+ \in \mathbb{R}$ tel que la restriction $y_0|_{]0;+\infty[}$ de y_0 à $]0;+\infty[$ est égale à $k_+ y_+$.

Donc, pour $x>0$, $y_0(x) = k_+ x$.

Comme y_0 est aussi solution de (*) sur $]-\infty;0[$ et que, sur cet intervalle, l'éq. (*) est équivalente à

$$y' = \frac{1}{x} y \qquad (***)$$

on sait que la restriction $y_0|_{]-\infty;0[}$ de y_0 à $]0;+\infty[$ fait partie de l'ensemble des solutions de (***) qui est

$$\{k y_- ; k \in \mathbb{R}\}$$

où $y_- :]-\infty;0[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{\int_{-1}^x \frac{dt}{t}} = e^{\ln|x|} = |x| = -x$.

Il existe donc $k_- \in \mathbb{R}$ tq $y_0|_{]-\infty;0[} = k_- y_-$.

Donc, pour tout $x<0$, $y_0(x) = -k_- x$.

On se souvient que y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, continue en 0. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} -k_- x = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} y_0(x) = y_0(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} y_0(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} k_+ x = 0$$

Ceci n'apporte aucune information nouvelle sur k_+ et k_- mais impose $y_0(0)=0$.

On sait que y_0 est dérivable en 0 donc, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{y_0(x)-y_0(0)}{x-0} = y_0'(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{y_0(x)-y_0(0)}{x-0} \qquad (****)$$

Or, pour $x>0$, on a

$$\frac{y_0(x)-y_0(0)}{x} = \frac{k_+ x - 0}{x} = k_+ \xrightarrow[x\to 0]{} k_+ .$$

et, pour $x<0$, on a

$$\frac{y_0(x)-y_0(0)}{x} = \frac{-k_- x - 0}{x} = -k_- \xrightarrow[x\to 0]{} -k_- ,$$

donc, par (****), $k_+ = -k_-$. On en déduit que $y_0 = k y_1$ où $y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ et pour un certain $k \in \mathbb{R}$.

Partant d'une solution y_0 de (*) sur $\mathbb{R}$, on a montré que nécessairement il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. $y_0 = k y_1$. On a donc montré que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (*) vérifie

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{E} := \{ k y_1 ; k \in \mathbb{R} \}.$$

En espérant avoir deviné correctement $\mathcal{S}_0$ (i.e. que $\mathcal{S}_0 = \mathcal{E}$), on montre maintenant que $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}_0$. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $y = k y_1$. Vérifions que y est solution de (*) sur $\mathbb{R}$. Tout d'abord, on voit que y est dérivable. D'après les études précédentes de (*) sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, on sait que y est sol. de (*) sur ces intervalles. Il reste donc à voir que y vérifie (*) pour $x=0$, or, on a,

$$0 = 0 \times y'(0) = 0 \times k = k y_1(0) = 0,$$

donc $y \in \mathcal{E}$. On a montré que $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}_0$. D'où $\mathcal{S}_0 = \mathcal{E}$.

Considérons un autre exemple, légèrement différent. On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation diff. linéaire donnée par

$$x y' = y + x, \quad (E)$$

Supposons qu'on ait une sol. $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E). y_0 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, y_0 est une sol. de (E) sur $]0;+\infty[$. Or, sur $]0;+\infty[$, (E) est équivalente à

$$y' = \frac{y}{x} + 1. \quad (E')$$

Par le cours, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des sol. de (E') est

$$\{ z + k y_1 ; k \in \mathbb{R} \}$$

où z est une sol. de (E') et

$$y_1 :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{\int_1^x \frac{dt}{t}} = e^{\ln(x)} = x.$$

On cherche z sous la forme $u \times y_1$ où $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et à déterminer. On a

$$z = uy_1 \in \mathcal{S}' \iff \forall x>0,\ u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x) = u(x)\frac{y_1(x)}{x} + 1$$

(car y_1 est sol. de l'éq. sans second membre associée)

$$\iff \forall x>0,\ u'(x) = \frac{1}{x}.$$

On choisit $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$. u est $\mathcal{C}^1$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x>0$

donc $uy_1 \in \mathcal{S}'$.

Comme $y_0|_{]0;+\infty[}$ appartient à $\mathcal{S}'$, il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\forall x>0,\quad y_0(x) = y_1(x)\big(u(x)+k\big) = x\big(\ln(x)+k\big).$$

Comme y_0 est cont. en 0, on a

$$y_0(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} y_0(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x(\ln(x)+k) = 0.$$

(croissances comparées)

Comme y_0 est dérivable en 0, on a

$$y_0'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{y_0(x)-y_0(0)}{x-0}.$$

Or, pour $x>0$,

$$\frac{y_0(x)-y_0(0)}{x-0} = \frac{y_0(x)}{x} = \ln(x)+k \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ >}]{} -\infty,$$

Contradiction. Il n'existe donc pas de sol. y_0 de (E).

Les deux exemples précédents entrent dans le cadre suivant :
Soit I un int. ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit
$a, b, c : I \to \mathbb{R}$ cont. telles que $a^{-1}(\{0\}) = \{x_0\}$.

On considère l'éq. diff. lin. donnée sur I par

$$a(x)y'(x) = b(x)y(x) + c(x). \quad (E).$$

Soit (E_0) l'éq. sans second membre associée donnée par

$$a(x)y'(x) = b(x)y(x). \quad (E_0).$$

Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_0$) l'ens. des sol. réelles sur I de (E) (resp. (E_0)).

Il se trouve que

* $\mathcal{S}_0$ est un $\mathbb{R}$-ev.;
* $\mathcal{S} = \{z + y ; y \in \mathcal{S}_0\}$ s'il existe z une sol. de (E)
  et $\mathcal{S} = \emptyset$ sinon.

Ceci ne faisant pas partie du cours, on ne pourra pas s'en servir dans les exercices. Cependant, cette information est utile pour mener à bien la résolution dans les cas concrets. Il est conseillé dans les cas traités de faire d'abord un brouillon pour deviner l'ensemble des solutions puis rédiger la résolution.

L'exercice 35 de la feuille supplémentaire traite une série d'éq. diff. lin. sans second membre de type (E) précédent. Dans chaque cas, l'ens. des sol. est un esp. vect. mais sa dimension varie suivant les cas (de 0 à 2!).
On voit aussi que le problème de Cauchy n'a pas toujours une sol. unique comme c'est le cas pour les éq. du type étudié dans le cours.

Ex. 3.1.

3.7. Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}. \quad (E).$$

On résout d'abord (E) sur $I_- =]-\infty;0[$ et $I_+ =]0;+\infty[$.

Comme $\pm$, $I_\pm \ni x \mapsto x$ ne s'annule pas, (E) sur $I_\pm$ est équiv. à

$\forall x \in I_\pm$, $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{1+x^2}$. $(E_\pm)$.

Par le cours, l'ens. $\mathcal{S}_\pm$ des sol. de $(E_\pm)$ est

$\mathcal{S}_\pm = \{ z_\pm + k y_\pm ; k \in \mathbb{R} \}$ où

$z_\pm$ est une sol. de $(E_\pm)$ et $y_\pm : I_\pm \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\int_{\pm 1}^{x} \frac{2\,dt}{t}} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$.

On cherche $z_\pm$ sous la forme $u_\pm y_\pm$ où $u_\pm : I_\pm \to \mathbb{R}$ est dériv.

$z_\pm \in \mathcal{S}_\pm \iff \forall x \in I_\pm$, $u_\pm'(x) y_\pm(x) + u_\pm(x) \cancel{y_\pm'(x)} + \frac{2}{x} u_\pm(x) \cancel{y_\pm(x)} = \frac{1}{1+x^2}$

$\iff \forall x \in I_\pm$, $u_\pm'(x) y_\pm(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Car $y_\pm$ est sol. de "$y' + \frac{2}{x} y = 0$" sur $I_\pm$. D'où

$z_\pm \in \mathcal{S}_\pm \iff \forall x \in I_\pm$, $u_\pm'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$. $(*_\pm)$

Soit $u_\pm : I_\pm \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \mathrm{Arctan}(x)$. $u_\pm$ est dérivable et

$(*_\pm)$ est vérifiée donc $z_\pm = u_\pm y_\pm \in \mathcal{S}_\pm$.

D'où $\mathcal{S}_\pm = \left\{ y : I_\pm \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x - \mathrm{Arctan}(x) + k_\pm}{x^2} \ ; k_\pm \in \mathbb{R} \right\}$.

Résolution de (E) : on note par $\mathcal{S}$ son ens. de sol.

Soit $y \in \mathcal{S}$. Comme $y_{|I_\pm}$ est sol. de (E), elle est aussi une sol. de $(E_\pm)$ donc, d'après la résolution précédente, il existe $k_\pm \in \mathbb{R}$ t.q.

$\forall x \in I_\pm$, $y(x) = \frac{x - \mathrm{Arctan}(x) + k_\pm}{x^2}$.

Comme y est cont. en 0, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in I_\pm}} y(x) = y(0).$$

Or, pour $x \in I_\pm$,

$$y(x) = \frac{x - \operatorname{Arctan}(x) + k_\pm}{x^2} = \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3) + k_\pm}{x^2} = -\frac{x}{3} + o(x) + \frac{k_\pm}{x^2}$$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in I_\pm}} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc, nécessairement, $k_\pm = 0$ et $y(0) = 0$.

Donc $y = y_0$ où $y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a montré que $\mathcal{S} \subset \{y_0\}$.

Vérifions maintenant que y_0 est sol. de (E). Sur $\mathbb{R}^*$, y_0 est C^1 par somme et quotient. De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{y_0(x) - y_0(0)}{x} = \frac{y_0(x)}{x} = \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{3}$$

donc y_0 est dérivable en 0. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Elle vérifie l'éq. (E) sur $\mathbb{R}^*$ ($\mathcal{S}, \mathcal{S}_\pm$). Enfin, on a

$$0 \times y_0'(0) + 2 y_0(0) = 0 \times \frac{-1}{3} + 2 \times 0 = 0 = \frac{0}{1+0^2}$$

donc (E) est aussi vérifiée pour $x = 0$. Donc $y_0 \in \mathcal{S}$ et $\{y_0\} \subset \mathcal{S}$. D'où $\mathcal{S} = \{y_0\}$.

3.9. Soit (E) l'éq. $x^2 y' + y = 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

On résout d'abord les éq. ($E_\pm$) données par $x^2 y' + y = 1$ sur $I_\pm = \mathbb{R}^{*\pm}$. On a

$$(E_\pm) \iff \forall x \in I_\pm,\ y' = -\frac{1}{x^2} y + 1.$$

Par le cours, l'ens. $\mathcal{S}_\pm$ des sol. de $(E_\pm)$ est

$$\mathcal{S}_\pm = \{ z_\pm + k y_\pm \,;\, k \in \mathbb{R} \}$$

où $z_\pm$ est une sol. de $(E_\pm)$ et $y_\pm : \begin{array}{ccc} I_\pm & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \lambda_\pm e^{-\int_{\pm 1}^x \frac{dt}{t^2}} = \lambda_\pm e^{\frac{1}{x} - (\pm 1)} = e^{\frac{1}{x}} \end{array}$

avec $\lambda_\pm = e^{\pm 1}$. On devine que $z_\pm : \begin{array}{ccc} I_\pm & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$ est sol. de $(E_\pm)$

<u>ou bien</u> on cherche $z_\pm$ par la méthode de var. des cts :

Pour $u_\pm : I_\pm \to \mathbb{R}$ dérivable on a

$$z_\pm = u_\pm y_\pm \in \mathcal{S}_\pm \iff \forall x \in I_\pm, \; x^2 u_\pm'(x) y_\pm(x) + x^2 u_\pm(x) y_\pm'(x) + u_\pm(x) y_\pm(x) = 1$$

$$\iff \forall x \in I_\pm, \; x^2 u_\pm'(x) y_\pm(x) = 1$$

Car $y_\pm$ est sol. de $x^2 y' + y = 0$ sur $I_\pm$. D'où

$$z_\pm = u_\pm y_\pm \in \mathcal{S}_\pm \iff \forall x \in I_\pm, \; u_\pm'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

On choisit, pour $x \in I_\pm$, $u_\pm(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. $u_\pm$ est dérivable sur $I_\pm$ et $u_\pm'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$ donc $z_\pm = u_\pm y_\pm \in \mathcal{S}_\pm$. On a

$z_\pm : \begin{array}{ccc} I_\pm & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$.

Soit y_0 une sol. de (E). Comme $y_0|_{I_\pm}$ est sol. de $(E_\pm)$, il existe $k_\pm \in \mathbb{R}$ t.q. $y_0|_{I_\pm} = z_\pm + k_\pm y_\pm$ donc

$$\forall x \in I_\pm, \; y_0(x) = 1 + k_\pm e^{\frac{1}{x}}.$$

Comme y_0 est continue en 0, on a

$$y_0(0) - 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ > }} k_+ e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ < }} k_- e^{\frac{1}{x}}. \quad (*)$$

Par composition, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ > }} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ < }} e^{\frac{1}{x}} = 0$. Donc $(*)$ impose $y_0(0) - 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ < }} k_- e^{\frac{1}{x}} = 0$ et $k_+ = 0$. Donc

$$y = y_{k_-} \text{ où, pour } k \in \mathbb{R},$$

$y_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 1$ si $x \geq 0$,
$1 + ke^{\frac{1}{x}}$ si $x < 0$.

En posant $\mathcal{E} = \{y_k \mid k \in \mathbb{R}\}$, on a montré que $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.
Soit $k \in \mathbb{R}$. y_k est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ par composition.
De plus, pour $x > 0$

$$\frac{y_k(x) - y_k(0)}{x} = \frac{1-1}{x} = \frac{0}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

et, pour $x < 0$,

$$\frac{y_k(x) - y_k(0)}{x} = k\,\frac{e^{\frac{1}{x}} - 0}{x} = k\,\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[k \to 0]{} 0$$

par composition car $\lim_{t \to -\infty} te^{-t} = 0$. Donc y_k est dérivable en 0 et $y_k'(0) = 0$. De plus, par la résolution précédente $(\mathcal{S}_\pm)$, $y_{k|I_\pm} \in \mathcal{S}_\pm$ donc y_k vérifie (E) sur $\mathbb{R}^*$.

Enfin, on a

$$0^2 \times y_k'(0) + y_k(0) = 0^2 \times 0 + 1 = 1.$$

Donc y_k vérifie (E) en 0. Donc $y_k \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.

Donc $\mathcal{S} = \mathcal{E}$.

3.8. Le cas peut être traité de manière similaire aux cas précédents. Cependant, on peut raccourcir le traitement de la façon suivante :

(E) : $xy' - 3y = x^5$ sur $\mathbb{R}$. Ens. des sol. : $\mathcal{S}$.

On devine que $y(x) = x^3$ est sol. de l'éq. sans second membre $xy' - 3y = 0$. On devine aussi qu'on a une sol. de (E) de la forme $y(x) = ax^5$. C'est le cas pour $a = \frac{1}{2}$!

On devine que $\mathcal{S}$ est l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^5}{2} + k x^3 \ ;\ k \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^5}{2} + k_+ x^3 & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{x^5}{2} + k_- x^3 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \ ; \ (k_+, k_-) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Une étude au brouillon donne la réponse ↑.

Rédaction. Soit

$$\mathcal{E} = \left\{ y_{k_+;k_-} \ ; \ (k_+;k_-) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

où, pour $(k_+;k_-) \in \mathbb{R}^2$, $y_{k_+;k_-} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^5}{2} + k_+ x^3 & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{x^5}{2} + k_- x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Pour $(k_+;k_-) \in \mathbb{R}^2$, $y_{k_+;k_-}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $x > 0$,

$$\frac{y_{k_+;k_-}(x) - y_{k_+;k_-}(0)}{x} = \frac{x^4}{2} + k_+ x^2 \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0,$$

et, pour $x < 0$,

$$\frac{y_{k_+;k_-}(x) - y_{k_+;k_-}(0)}{x} = \frac{x^4}{2} + k_- x^2 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0.$$

Donc $y_{k_+;k_-}$ est dérivable en 0 et $y'_{k_+;k_-}(0) = 0$. On a

$$0 \times y'_{k_+;k_-}(0) - 3 y_{k_+;k_-}(0) = 0 \times 0 - 3 \times 0 = 0 = 0^5,$$

• pour $x > 0$,

$$x\, y'_{k_+;k_-}(x) - 3 y_{k_+;k_-}(x) = x \times \left(\frac{5}{2} x^4 + 3 k_+ x^2 \right) - 3 \left(\frac{x^5}{2} + k_+ x^3 \right) = x^5,$$

et, pour $x < 0$,

$$x\, y'_{k_+;k_-}(x) - 3 y_{k_+;k_-}(x) = x \times \left(\frac{5}{2} x^4 + 3 k_- x^2 \right) - 3 \left(\frac{x^5}{2} + k_- x^3 \right) = x^5.$$

Donc $y_{k_+;k_-} \in \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.

Soit y une sol. de (E). Pour $I_\pm = \mathbb{R}^{\pm *}$, $y_{|I_\pm}$ est sol. de (E) sur $I_\pm$.

Par le cours, l'ens $\mathcal{Y}_\pm$ des sol. de (E) sur $I_\pm$ est du type
$\mathcal{Y}_\pm = \{ z_\pm + k y_\pm \,;\, k \in \mathbb{R} \}$.

Sur $I_\pm$, les sol. de $\mathcal{E}$ sont aussi sol. donc $\mathcal{Y}_\pm = \{ z_\pm + k y_\pm \,;\, k \in \mathbb{R} \}$
pour $z_\pm : \begin{array}{ccc} I_\pm & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \frac{x^5}{2} \end{array}$ et $y_\pm : \begin{array}{ccc} I_\pm & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$.

Donc, il existe $k_\pm \in \mathbb{R}$ t.q. $y_{|I_\pm} = z_\pm + k_\pm y_\pm$.

Donc, $y_{|\mathbb{R}^*} = y_{k_+ ; k_-}$; comme y et $y_{k_+ ; k_-}$ sont continues
on a $y(0) = y_{k_+ ; k_-}(0)$ donc $y = y_{k_+ ; k_-}$ et $y \in \mathcal{E}$.

D'où $\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{Y} = \mathcal{E}$.

3.11. : On peut suivre la démarche adoptée jusqu'ici avec une différence notable. On va devoir résoudre

(E) $(1-x^2) y' + xy = 1$ sur $\mathbb{R}^2$

sur $]-\infty ; -1[$, $]-1 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ puisque la fonct. $x \mapsto 1-x^2$ s'annule en -1 et 1.

Il peut être utile de remarquer que la fonct. $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est sol. de (E).