Calculus 12

Eq. diff. linéaires du 2nd ordre à coeff. constants.

Rappel. Dans ces éq. diff. linéaires du 2nd ordre l'inconnue est une fonction mais cette fois deux fois dérivable et sa dérivée seconde apparaît dans l'éq. Le cours se restreint à un type très particulier d'éq. linéaires. Elles sont de la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(x) \quad \text{sur } I \qquad (E)$$

où $(a;b;c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $d : I \to \mathbb{R}$ est continue.

On se focalisera sur les solutions réelles des éq.

La méthode de résolution repose crucialement sur l'éq. caractéristique associée à l'éq. diff. (E) :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (C)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si l'on a oublié comment (C) est associée à (E) on peut utiliser le procédé suivant pour retrouver le lien :

→ considérer l'éq. sans second membre (E_0) associée à (E) :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad (E_0)$$

→ chercher une sol. de (E_0) sous la forme $y_z : x \mapsto e^{zx}$ où $z \in \mathbb{C}$.

On voit alors

y_z sol. de (E_0) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $a(z^2 e^{zx}) + b(z e^{zx}) + c = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $(az^2 + bz + c)e^{zx} = 0$

$\Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0 \longleftarrow (C)$!!

puisque l'exp. ne s'annule pas.

Encore une fois, le cours fait le gros du travail.

L'ens. $\mathcal{S}$ des sol. de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \{z + y ; y \in \mathcal{S}_0\}$$

où $\mathcal{S}_0$ est l'ens. des sol. de (E_0) et z une sol. de (E).
C'est comme pour les éq. diffé. du 1er ordre à la différence que maintenant $\mathcal{S}_0$ est un esp. vect. de dimension 2 (au lieu de 1).
L'éq. caractéristique sert à déterminer une base de $\mathcal{S}_0$ (cf cours).
Pour trouver une sol. z de (E), le cours donne quelques outils :

- le principe de superposition ;
- des astuces pour deviner une solution ;

On peut aussi utiliser la méthode de "variation des constantes" suivante pour déterminer une sol. z de (E).
Une explication complète de cette méthode n'est pas disponible et ne sera vue qu'en L2.

Méthode de "variation des constantes" : On suppose connue une base $(y_1 ; y_2)$ de sol. de l'éq. (E_0). On cherche z sous la forme $z = u_1 y_1 + u_2 y_2$ où u_1 et u_2 sont des fct. dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On admet que

$$z \in \mathcal{S} \iff \forall x \in I, \begin{cases} u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x) = 0 \\ \text{et} \\ u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x) = d(x) \end{cases}$$

On tombe donc sur un système en les inconnues $u_1'(x)$ et $u_2'(x)$. Ce système est de Kramer du fait

que $(y_1;y_2)$ est une famille libre. On obtient donc

$z \in \mathcal{S}(=) \forall x \in I,\ u_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ d(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}$ et $u_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & d(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}$.

On se ramène donc à 2 calculs de primitives.

Exemple simple : $y'' - y = x$. (E).

L'éq. sans second membre associée est : $y'' - y = 0$ (E_0).

L'éq. caractéristique associée est : $z^2 - 1 = 0$.

Les sol. de l'éq. caractéristique sont -1 et 1. Donc, par le cours, $(y_+;y_-)$ est une base de $\mathcal{S}_0$ si $y_\pm : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{\pm x}$.

Rq. : on peut aussi deviner que ces fct. y_+ et y_- sont sol. de (E_0) et ensuite démontrer qu'elles forment une famille libre de fonctions. Pour ce faire, on suppose qu'on a λ_+ et λ_- réels tq. $\lambda_+ y_+ + \lambda_- y_- = 0$ et on montre que $\lambda_+ = \lambda_- = 0$.

Dans le cas présent, on peut argumenter comme suit :

On a

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_+ e^x + \lambda_- e^{-x} = 0$. $(*)$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, on a, par $(*)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda_+ e^x = 0$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc nécessairement $\lambda_+ = 0$ et $(*)$ devient

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_- e^{-x} = 0$.

Comme $x \mapsto e^{-x}$ ne s'annule pas, $\lambda_- = 0$.

Pour terminer la résolution de (E), on cherche une sol. z de (E).

* On peut deviner que la fct. $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto -x$ est solution.

* On peut utiliser une astuce du cours qui nous invite, étant donné que le second membre de l'éq. est du type $P(x)e^{rx}$ où $r = 0$ n'est pas sol. de l'éq. caract. et $P(x) = x$, à chercher z

sous la forme $z(x) = Q(x)e^{0\cdot x}$ avec $d^\circ Q = d^\circ P = 1$.
On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ tq. $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto ax+b$ soit sol. de (E).

$z \in \mathcal{S} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) - z(x) = x$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 0 - (ax+b) = x$

$\iff a = -1$ et $b = 0$,

Donc $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto -x$ est sol. de (E).

* On peut aussi utiliser la méthode de "variation des constantes".
On cherche $u_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables tq. $z = u_+ y_+ + u_- y_-$ soit une sol. de (E). On a

$$z \in \mathcal{S} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} u_+'(x) y_+(x) + u_-'(x) y_-(x) = 0 \\ \text{et} \\ u_+'(x) y_+'(x) + u_-'(x) y_-'(x) = x \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} u_+'(x) e^x + u_-'(x) e^{-x} = 0 \\ \text{et} \\ u_+'(x) e^x - u_-'(x) e^{-x} = x \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ u_+'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} \text{ et } u_-'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ u_+'(x) = \frac{-xe^{-x}}{-2} \text{ et } u_-'(x) = \frac{xe^x}{-2}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ u_+'(x) = \frac{x}{2}e^{-x} \text{ et } u_-'(x) = -\frac{x}{2}e^x. \quad (*)$$

Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on détermine

$$-\int_\varepsilon^x \frac{t}{2} e^{\varepsilon t}\,dt = -\frac{1}{2}\left(\left[t e^{\varepsilon t} \right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x (t)' e^{\varepsilon t}\,dt \right) = -\frac{1}{2}\left(xe^{\varepsilon x} - \int_\varepsilon^x e^{\varepsilon t}\,dt \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(xe^{\varepsilon x} - \varepsilon e^{\varepsilon x} \right) + K = -\frac{x-\varepsilon}{2} e^{\varepsilon x} + K.$$

On choisit $u_+(x) = -\frac{x+1}{2}e^{-x}$ et $u_-(x) = -\frac{x-1}{2}e^x$. (Il est vérifié que la fct. $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$z(x) = -\frac{x+1}{2} e^{-x} \times e^x - \frac{x-1}{2} e^x \times e^{-x} = -x$$

est sol. de (E).

Par le cours, l'ens. S des sol. de (E) est

$$\{z+y\,;\, y\in S_0\} = \{z+\lambda_+ y_+ + \lambda_- y_-\,;\, (\lambda_+;\lambda_-)\in\mathbb{R}^2\}.$$

3.2.

Ex. 3.2. : Résoudre $y''+2y'+y=2e^{-x}$. (E).

C'est une éq. diff. linéaire du 2nd ordre à coeff. constants.

L'équation caractéristique associée est : $z^2+2z+1=0$. (C).

On a

$$(C) \iff (z+1)^2=0 \iff z=-1.$$

D'après le cours, l'ens. S_0 des sol. de l'éq. sans second memb. est l'esp. vect. sur $\mathbb{R}$ engendré par les fonctions :

$$y_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^{-x} \quad \text{et} \quad y_1 : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto xe^{-x}.$$

Par le cours, l'ens. S des sol. de l'éq. est donné par

$$\{z+y\,;\, y\in S_0\} = \{z+\lambda_0 y_0+\lambda_1 y_1\,;\, (\lambda_0;\lambda_1)\in\mathbb{R}^2\}$$

où z est une sol. à déterminer de (E). On cherche z sous la forme $z(x)=Q(x)e^{-x}$ avec $Q\in\mathbb{R}[x]$ et $\deg Q=2$ (le second membre est du type $P(x)e^{-x}$ avec $P\in\mathbb{R}[x]$ et $\deg P=0$ et -1 est racine double de l'éq. caract. (C)), c'est-à-dire

$$z(x)=e^{-x}(ax^2+bx+c).$$

On a, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$z'(x)=e^{-x}(-ax^2-bx-c+2ax+b)=-e^{-x}(ax^2+(b-2a)x+c-b)$$

et

$$z''(x)=e^{-x}(ax^2+(b-2a)x+c-b-2ax-(b-2a))$$

donc

$$z\in S \iff \forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}(ax^2+(b-4a)x+c-2b+2a)-2e^{-x}(ax^2+(b-2a)x+(c-b)) + e^{-x}(ax^2+bx+c)=2e^{-x}$$

$$\iff \forall x\in\mathbb{R},\ ax^2+(b-4a)x+c-2b+2a-2(ax^2+(b-2a)x+(c-b))+ax^2+bx+c=2$$

$$\iff b-4a-(b-2a)+b=0 \text{ et } c-2b+2a-2(c-b)+c=2$$

$$\iff$$

D'où

$z \in \mathcal{S} \iff b = 2a$ et $+2a = 2 \iff a = 1$ et $b = -2$

Soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x+2)xe^{-x}$. D'après les équiv. précédentes,

$z \in \mathcal{S}$.

Ex. 3-1 : Résoudre (E) : $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$.

C'est une éq. diff. linéaire du 2nd ordre à coeff. constants.

L'éq. caractéristique (C) associée est : $z^2 + z + 1 = 0$.

Les racines de (C) sont $z = j$ et $\bar{j}$ où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Par le cours, l'ens. $\mathcal{S}_0$ des sol. réelles de l'éq. sans second membre associée à (E) est l'esp. vect. sur $\mathbb{R}$ engendré par

$y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On cherche une sol. $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E) sous la forme :

$$z(x) = ax^2 + bx + c$$

(car le second mb. est du type $(a'x^2 + b'x + c')e^{0x}$ et 0 n'est pas sol. de l'éq. caract.)

On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = 2ax + b$ et $z''(x) = 2a$.

Donc, en notant par $\mathcal{S}$ l'ens. des sol. de (E),

$z \in \mathcal{S} \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $2a + (2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 + x + 1$

$\iff$ ($a = 1$ et $2a + b = 1$ et $2a + b + c = 1$)

$\iff$ ($a = 1$ et $b = -1$ et $c = 0$).

Donc la fonct. $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x^2 - x$ est sol. de (E).

Par le cours, $\mathcal{S} = \{z + y ; y \in \mathcal{S}_0\} = \{z + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 ; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ex. 3.3 Résoudre $y''+y' = x + \mathrm{ch}(x)$ (E).

C'est une équation diff. linéaire du 2nd ordre à coeff. constants.
L'éq. caractéristique (c) associée est : $z^2+z=0$.

On a :
$$z^2+z=0 \iff z(z+1)=0 \iff z=0 \text{ ou } z=-1.$$

Par le cours, l'ens. $\mathcal{S}_0$ des sol. de l'éq. sans second memb. associée à (E) est l'esp. vect. engendré par

$$y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \quad \text{et} \quad y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}.$$

Par le cours, l'ens. $\mathcal{S}$ des sol. de (E) est
$$\mathcal{S} = \{ z+y ; y \in \mathcal{S}_0 \} = \{ z + \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 ; (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2 \}$$
où z est une sol. de (E) à déterminer.

On cherche une sol. z_0 de $y''+y'=x$, une sol. z_{-1} de $y''+y' = \frac{e^{-x}}{2}$ et une sol. z_1 de $y''+y' = \frac{e^x}{2}$. Par le principe de superposition, $z = z_0 + z_{-1} + z_1$ sera une sol. de (E).

On cherche $z_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sous la forme $z_0(x) = ax^2+bx+c$.
(le second membre est du type xe^{0x} avec 0 sol. simple de l'éq. caract.)

On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $z_0'(x) = 2ax+b$ et $z_0''(x) = 2a$.

Donc
$$z_0 \text{ sol. de } y''+y'=x \iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2a + (2ax+b) = x \iff 2a=1 \text{ et } 2a+b=0$$
$$\iff a = \frac{1}{2} \text{ et } b=-1.$$

Donc $z_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2}{2} - x$ est sol. de $y''+y'=x$.

On cherche $z_{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sous la forme $z_{-1}(x) = (ax+b)e^{-x}$
(car le second memb. est du type $P(x)e^{-x}$ avec P poly. de deg 0 et -1 sol. simple de l'éq. caract. (C))

On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $z_{-1}'(x) = e^{-x}(-ax-b+a) = e^{-x}(a-b-ax)$
et $z_{-1}''(x) = e^{-x}(-a+b+ax-a) = e^{-x}(ax+b-2a)$.

Donc
z_{-1} est sol. de $y''+y' = \frac{e^{-x}}{2} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}(ax+b-2a)+e^{-x}(a-b-ax) = \frac{e^{-x}}{2}$

$\iff b-2a+a-b = \frac{1}{2} \iff a = -\frac{1}{2}$.

Donc $z_{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{2}xe^{-x} \end{array}$ est sol. de $y''+y' = \frac{e^{-x}}{2}$.

On cherche $z_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sous la forme $z_1(x) = ae^x$
(Car le second mb. est du type $P(x)e^x$ avec $\deg P = 0$ et 1 n'est pas sol. de (E)).
On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $z_1'(x) = z_1''(x) = ae^x$.

Donc
z_1 sol. de $y''+y' = \frac{e^x}{2} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ae^x = \frac{e^x}{2} \iff a = \frac{1}{4}$.

Donc $z_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{4}e^x \end{array}$ est sol. de $y''+y' = \frac{e^x}{2}$.