

2.2.

Calculs 2.

(5)

Ex. 2.1.

$$\int (3t^4 - 2t^3 + t) dt = \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + K \quad \uparrow \text{constante.}$$

↳ Ceci représente une famille de fonctions de la variable x à savoir l'ensemble des primitives de $t \mapsto 3t^4 - 2t^3 + t$.

Sur le membre de droite, on lit ces primitives qui

sont paramétrées par une constante $K \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

L'égalité ci-dessus est une version abrégée de l'égalité

$$\{ \text{ens. des primitives} \}_{\text{réelles}} \text{ de } t \mapsto 3t^4 - 2t^3 + t = \left\{ x \mapsto \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + K; K \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^*$, on a

$$\int^x \frac{3}{t^3} dt = \int^x 3t^{-3} dt = \left[\frac{3t^{1-3}}{1-3} \right]^x = \frac{-3}{2x^2} + K.$$

On rappelle que l'on cherche tjs les primitives

sur un intervalle donné incluant dans le domaine

de définition de la fonction à primitive ^{on prend souvent un intervalle où la fct. à primitier est continue}

ici, on a simultanément déterminé les primitives

dans les cas $I \subset \mathbb{R}^{-*}$ et $I \subset \mathbb{R}^{+*}$.

sur $I \subset \mathbb{R}^{+*}$,

$$\int^x 3t\sqrt{t} dt = \int^x 3t^{1+\frac{1}{2}} dt = 3 \int^x t^{\frac{3}{2}} dt = 3 \left[\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]^x = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + K.$$

sur $I \subset \mathbb{R}^{+*}$,

$$\int^x \frac{5t^{\frac{3}{2}+1}}{\sqrt{t}} dt = 5 \int^x t^{3-\frac{1}{2}} dt + \int^x t^{-\frac{1}{2}} dt = 5 \left[\frac{t^{3-\frac{1}{2}+1}}{3-\frac{1}{2}+1} \right]^x + \left[\frac{t^{1-\frac{1}{2}+1}}{1-\frac{1}{2}+1} \right]^x = \frac{10}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + K.$$

Sur $I \subset \mathbb{R}$,

[7]

$$\int^x t e^{2t} dt = \frac{1}{2} \int^x \left(t + 2e^{2t} \right) dt = \frac{1}{2} \int^x t \times \frac{d}{dt}(e^{2t}) dt$$

et on va utiliser la formule d'intégration par parties suivantes : pour $f, g: \overset{\text{int.}}{I} \rightarrow \mathbb{R} (m\mathbb{C})$ de classe C^1

$$\text{on a, sur } I, \quad \int^x f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]^x - \int^x f(t)g'(t) dt$$

ou $[f(t)g(t)]^x = f(x)g(x)$. Cette formule provient de la formule de Leibniz : pour $t \in I$,

$$\frac{d}{dt} (f(t)g(t)) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

donc, sur I ,

$$f(x)g(x) = \int^x \frac{d}{dt}(fg) dt = \int^x f'(t)g(t) dt + \int^x f(t)g'(t) dt.$$

Revenons à l'exercice en appliquant cette formule

pour $f(t) = e^{2t}$ et $g(t) = t$, on obtient sur $I \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int^x t e^{2t} dt &= \frac{1}{2} \int^x t \frac{d}{dt}(e^{2t}) dt = \frac{1}{2} \left([t e^{2t}]^x - \int^x e^{2t} \frac{d}{dt}(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x e^{2x} - \int^x e^{2t} \times 1 dt \right) \\ &= \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]^x = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + K. \end{aligned}$$

Sur $I \subset]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\begin{aligned} \int^x \tan t dt &= \int^x \frac{\sin t}{\cos t} dt = - \int^x \frac{(\cos t)'}{\cos t} dt = - [\ln(\cos t)]^x \\ &= -\ln(\cos x) + K. \end{aligned}$$

Sur $I \subset \mathbb{R}$, on a

$$\int^x \cos\left(\frac{t}{3}\right) dt = \left[3 \sin\left(\frac{t}{3}\right) \right]^x = 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) + K.$$

On peut retrouver ce résultat par la formule de chang. de variables: sur $I \subset \mathbb{R}$.

$$\int^x \cos\left(\frac{t}{3}\right) dt = 3 \int^x \frac{1}{3} \cos\left(\frac{t}{3}\right) dt = 3 \int^{\varphi(x)} \varphi'(t) \cos(\varphi(t)) dt \text{ où}$$

$\varphi(t) = t/3$ est C^1 . D'nc, par chang. de var.,

$$\int^x \cos\left(\frac{t}{3}\right) dt = 3 \int^{\varphi(x)} \cos(u) du = 3 [\sin(u)]^{\varphi(x)} = 3 \sin(\varphi(x)) + K \\ = 3 \sin(x/3) + K.$$

Par $I \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0; 1\}$ (car $t \mapsto t \ln t$ est déf. et conti.

$$\int^x \frac{dt}{t \ln t} = \int^x \varphi'(t) \frac{1}{\varphi(t)} dt \quad \text{car} \quad t \mapsto t \ln t \text{ est déf. et conti. sur } \mathbb{R}^+ \setminus \{0; 1\}$$

D'nc, par chang. de var.,

$$\int^x \frac{dt}{t \ln t} = \int^{\varphi(x)} \frac{du}{u} = [\ln|u|]^{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + K \\ = \ln|\ln(x)| + K.$$

En particulier, si $I \subset]0; 1[$, on a

$$\int^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(-\ln x) + K,$$

Car $\ln$ est strict. négative sur $]0; 1[$.

Compléments

sur $I \subset]-1; 1[$,

$$\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int^x \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int^{\varphi(x)} \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} dt$$

où $\varphi : I \rightarrow]-1; 1[$ donnée par $\varphi(t) = t^2$ est C^1 par chang. de var.,

$$\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int^{\varphi(x)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} [\text{Arcsin}(u)]^{\varphi(x)} = \frac{1}{2} \text{Arcsin}(x^2) + K.$$

cf. Ex. 2 de la feuille supplémentaire.

Calcul des primitives d'Arctan (qui est C^1).

Où a , sur $I \subset \mathbb{R}$,

$$\int^a \frac{t}{1+t^2} dt = \int^a t \times (\text{Arctan}(t))' dt$$

intégration par $\leftarrow$ IPP $\equiv$
$$[t \text{Arctan}(t)]^a - \int^a \underbrace{\frac{(t)'}{1}}_{=1} \text{Arctan}(t) dt$$

$$D'où \int^a \text{Arctan}(t) dt = a \text{Arctan}(a) - \int^a \frac{t}{1+t^2} dt.$$

Or, sur I ,

$$\int^a \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int^a \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \left[\ln(1+t^2) \right]^a = \frac{1}{2} \ln(1+a^2) + K,$$

$$\text{d'où} \int^a \text{Arctan}(t) dt = a \text{Arctan}(a) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2) + K,$$

Calcul des primitives d'Arcsin (qui est C^1 sur $] -1; 1[$).

Sur $I \subset] -1; 1[$, on a

$$\int^a \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int^a t \times (\text{Arcsin}(t))' dt \stackrel{\text{IPP}}{=} [t \text{Arcsin}(t)]^a - \int^a \underbrace{\frac{(t)'}{1}}_{=1} \text{Arcsin}(t) dt$$

$$\text{d'où} \int^a \text{Arcsin}(t) dt = a \text{Arcsin}(a) - \int^a \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Or, sur $I \subset] -1; 1[$, on a

$$\int^a \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int^a \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} dt \text{ où } \varphi: I \rightarrow]0; +\infty[\text{ est } C^1$$

$t \mapsto 1-t^2$

d'où, par chang. de var.,

$$\int^a \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int^{\varphi(a)} \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[\sqrt{u} \right]^{\varphi(a)} = \sqrt{1-a^2} + K,$$

D'où, sur $I \subset] -1; 1[$,

$$\int^a \text{Arcsin}(t) dt = a \text{Arcsin}(a) + \sqrt{1-a^2} + K.$$