

Calculus 3.

10

2. Fonctions paires et impaires

a) On suppose que f a une primitive F .

Par tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(F(x) + F(-x)) = f(x) + f(-x) = 0$, car f est paire.
 donc la fonction $x \mapsto F(x) + F(-x)$ est de égale à $c \in \mathbb{R}$.

En particulier $2F(0) = c$. Par def.

$$\int_{-a}^a f(t) dt = F(a) - F(-a) = 2F(a) - (F(a) + F(-a)) = 2F(a) - c$$

$$= 2F(a) - 2F(0) = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant la relation de chasle
 et un changement de var :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \stackrel{\text{parité}}{=} \int_{-a}^0 f(-t) dt + \int_0^a f(t) dt$$

$$= - \int_{-a}^0 f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \int_0^a f(t) dt$$

On $\varphi: t \mapsto -t$ est C^1 . Par changement de var,

$$\int_{-a}^a f(t) dt = - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(-a)} f(u) du + \int_0^a f(t) dt = - \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

Applications: les fct. $t \mapsto t^2$, $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto |t|^3$
 sont paires et continues. Elles admettent donc
 des primitives. Par le résultat précédent,

$$\int_{-2}^2 t^2 dt = 2 \int_0^2 t^2 dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{24}{3} \quad \left(\text{Pg. : } \int_{-2}^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{2^3 - (-2)^3}{3} = \frac{2^4}{3} \right).$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 2 \left[\sin t \right]_0^{\pi/2} = 2.$$

$$\int_{-1}^1 |t|^3 dt = 2 \int_0^1 t^3 dt = 2 \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

b) On supp. que f admet une primitive F . Par tout $x \in \mathbb{R}$,
 $\frac{d}{dx}(F(x) - F(-x)) = f(x) - f(-x)(-1) = f(x) + f(-x) = 0$ car f est impaire.
 donc il existe $c \in \mathbb{R}$ t.s., par tout x , $F(x) = F(-x) + c$. En particulier,
 $F(0) = F(0) + c$ donc $c = 0$. [On note la différence avec le cas f paire!].

F est donc paire. donc $\int_{-a}^a f(t) dt = F(a) - F(-a) = 0$.

là aussi, on peut trouver ce résultat par chang. de var. 111
On a :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \stackrel{f \text{ impaire}}{=} -\int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(t) dt \\ &= + \int_{-a}^0 f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \int_0^a f(t) dt \end{aligned}$$

on $\varphi: t \mapsto -t$ est C^1 . Par chang. de var.,

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(-a)} f(u) du + \int_0^0 f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = -\int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 0.$$

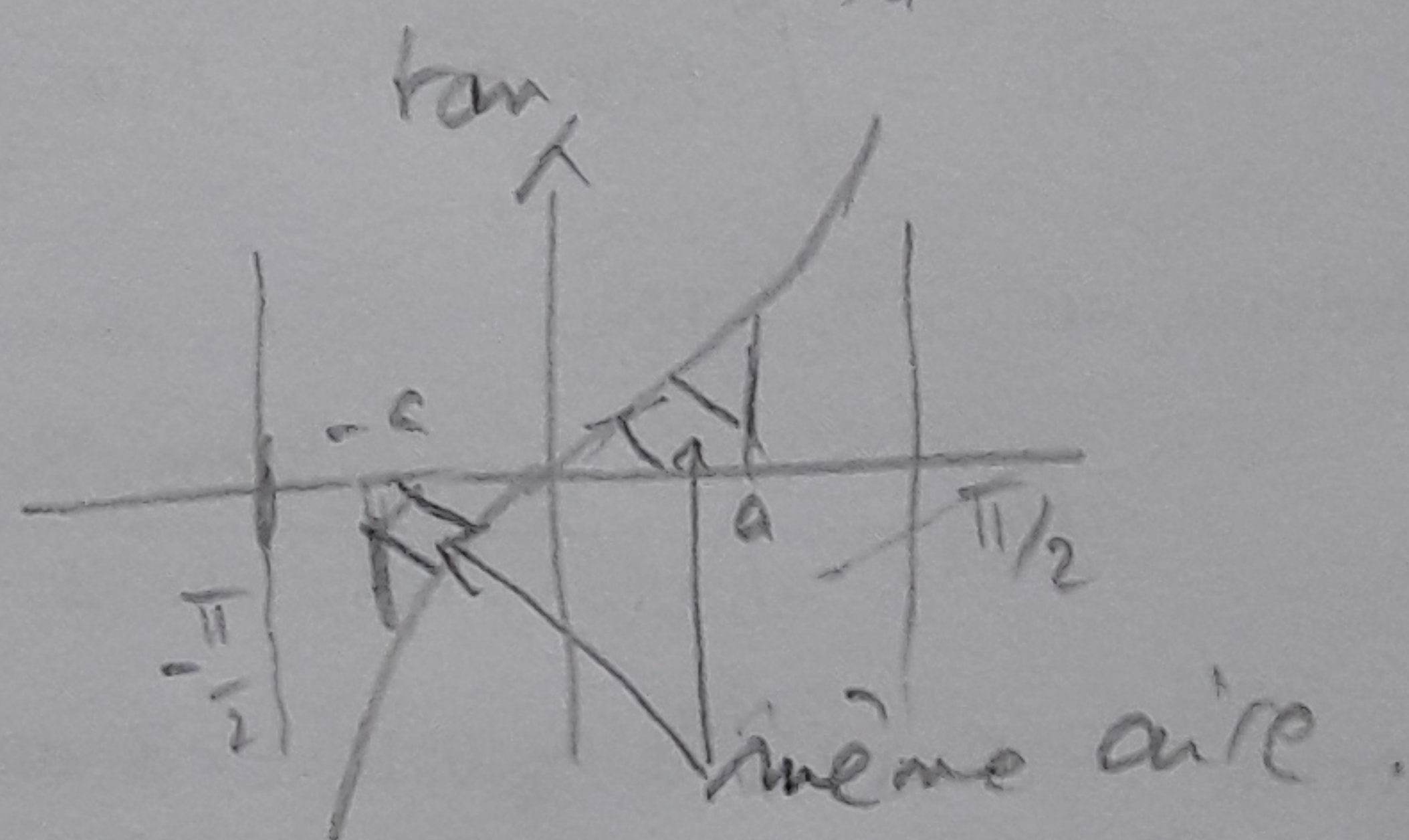
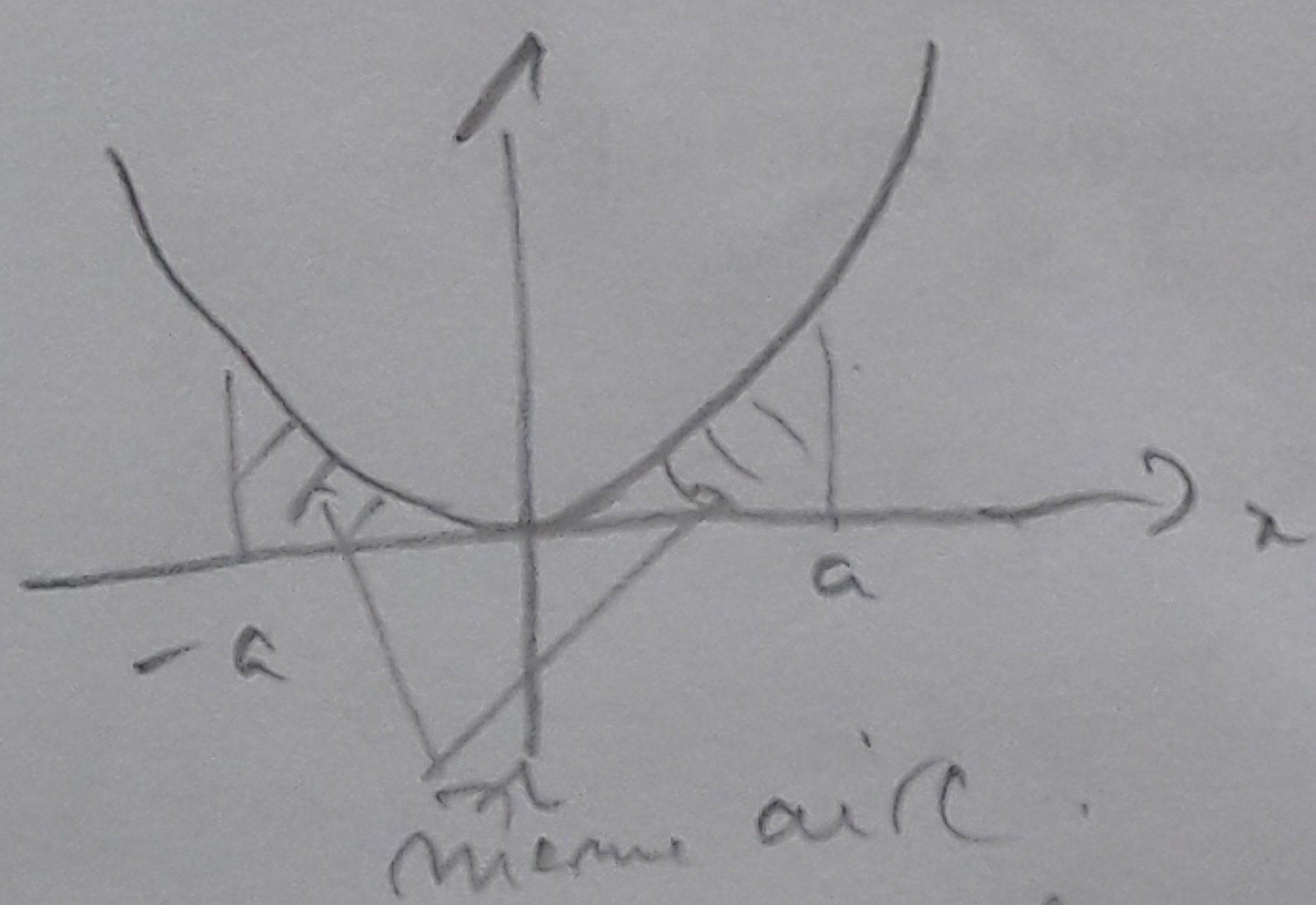
Applications : les fonct. $t \mapsto t^3$, $t \mapsto \sin(t)$; $t \mapsto \sin(\frac{t}{3}) \sin^2(t)$
et $]-\pi/2, \pi/2[\ni t \mapsto \tan(t)$ sont continues et impaires.

Par le résultat précédent,

$$\int_{-2}^2 t^3 dt = 0 \quad (\text{en effet, } \int_{-2}^2 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{2^4 - (-2)^4}{4} = 0)$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(t) dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{t}{3}\right) \sin^2(t) dt = 0, \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(t) dt = 0.$$

Interprétation graphique :



Fonctions périodiques : soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sur $T \in \mathbb{R}$.

On dit que f est T -périodique si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$$

Pour $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quelconque, $T \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\forall x \in \mathbb{R}, g(x+kT) = g(x)) \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R}, g(t+T) = g(t)).$$

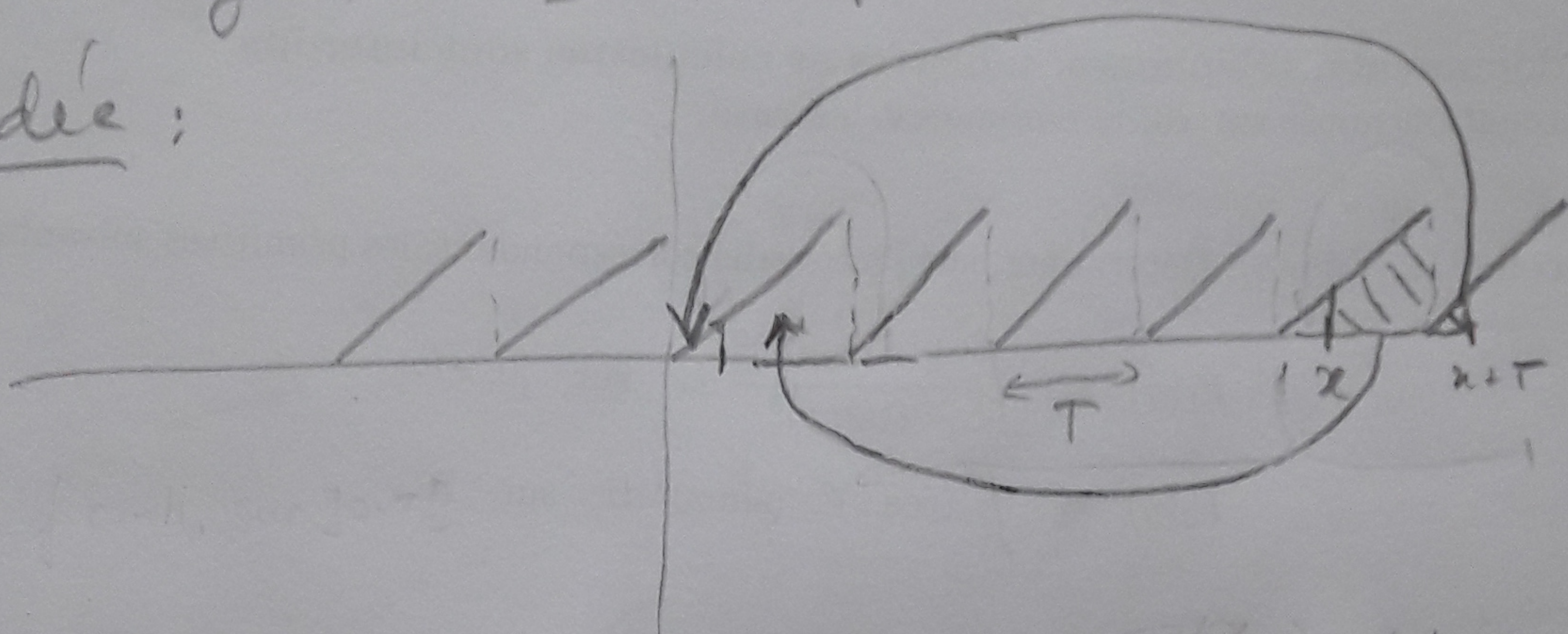
Une fonct. T -périodique est $(-T)$ -périodique et aussi (kT) -périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On remarque que toutes les fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont 0 -périodiques.

On se concentre sur les fct. T -périodiques, pour un $T \neq 0$.
 Comme une fct. T -périodique est automatiquement $(-T)$ -périodique,
 on peut se restreindre à l'étude des fct. T -périodiques
 pour un $T > 0$.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique avec $T > 0$.

(a) Idee:



On suppose que f est conti. sur $]0; T[$ et que
 les limites $\lim_{0^+} f$ et $\lim_{T^-} f$ existent dans $\mathbb{R}$.

Par périodicité, f est conti. sur $]kT; (k+1)T[$ et
 les limites $\lim_{(kT)^+} f$ et $\lim_{((k+1)T)^-} f$ existent dans $\mathbb{R}$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $k = E(\frac{x}{T})$. On a $E(\frac{x}{T}) \leq \frac{x}{T} < E(\frac{x}{T}) + 1$
 donc $kT \leq x < (k+1)T$ et $0 \leq x - kT < T$. Par périodicité,

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_x^{(k+1)T} f(t) dt + \int_{(k+1)T}^{x+T} f(t) dt = \int_x^{(k+1)T} f(t - kT) dt + \int_{(k+1)T}^{x+T} f(t - (k+1)T) dt.$$

Comme $f:]x; (k+1)[\rightarrow \mathbb{R}$ se prolonge par conti. sur $[x; (k+1)T]$
 et $\varphi: x \mapsto x - kT$ est C^1 , on a par changement de var.

$$\int_x^{(k+1)T} f(t - kT) dt = \int_{\varphi(x)}^{\varphi((k+1)T)} f(u) du = \int_{x-kT}^{x-kT+T} f(u) du.$$

De m^{me}, $\int_{(k+1)T}^{x+T} f(t - (k+1)T) dt = \int_{(k+1)T}^{x+T - (k+1)T} f(u) du$

donc $\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^{x-kT} f(u) du + \int_{x-kT}^T f(u) du = \int_0^T f(t) dt.$

Rq. : si l'on suppose $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique (avec $T > 0$) on peut argumenter de la façon suivante.
 Par le cours, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est C^1 et sa dérivée est f . La fonction

$$G: x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^{x+T} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

est dérivable par composition et différence et

$$G'(x) = f(x+T) - f(x) = 0, \text{ par périodicité.}$$

Donc G est constante égale à $G(0)$ qui vaut $\int_0^T f(t) dt$.

(b). On se place dans la situation du (a).

Il existe $(k; l) \in \mathbb{Z}^2$ tq. $kT \leq a < (k+1)T$ et $lT \leq b < (l+1)T$.

Par exemple, on suppose $a \leq b$ donc $k \leq l$.

1^{er} cas : $k = l$. On a f conti. sur $[a; b]$ et par changement de variable

$$\int_a^b f(t) dt \stackrel{\text{périodicité}}{=} \int_a^b f(t+T) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(u) du.$$

2^è cas : $k < l$. On a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^{(k+1)T} f(t) dt + \int_{(k+1)T}^{lT} f(t) dt + \int_{lT}^b f(t) dt \\ &= \int_a^{(k+1)T} f(t+T) dt + \int_{(k+1)T}^{lT} f(t+T) dt + \int_{lT}^b f(t+T) dt \\ &\stackrel{\text{ch. de var.}}{=} \int_{a+T}^{(k+1)T+T} f(u) du + \int_{(k+1)T+T}^{lT+T} f(u) du + \int_{lT+T}^{b+T} f(u) du \\ &= \int_{a+T}^{b+T} f(u) du. \end{aligned}$$

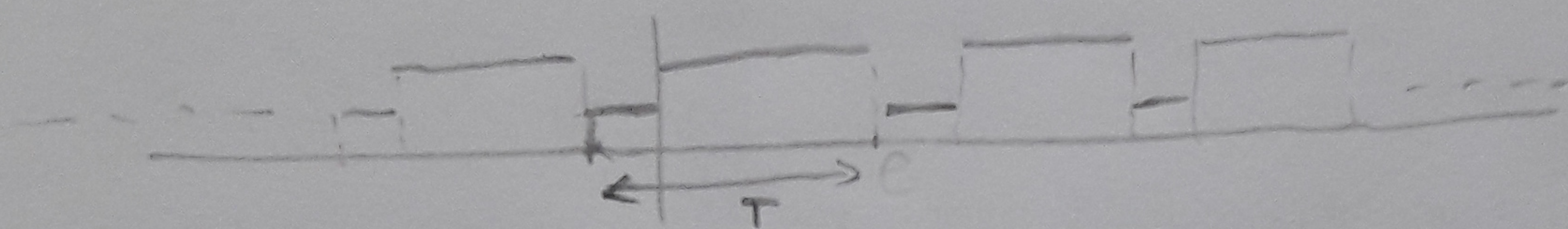
La encore, si f est de plus continue, on peut écrire

$$\frac{d}{db} \left(\int_a^b f(t) dt - \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt \right) = f(b) - f(b+T) = 0$$

d'où $\int_a^b f(t) dt - \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt = \int_a^a f(t) dt - \int_{a+T}^{a+T} f(t) dt = 0 - 0 = 0.$

D'où $\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt.$

(c) funct. périodiques :



sinus et cosinus sont 2π -périodiques, *tangente*

Même si elle n'entre pas dans le cadre étudié ici *tangente*
est π -périodique car $\tan : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$

et on a, pour tout $x \in D$, $x + \pi \in D$ et

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x).$$

(e). Comme $|\cos(t) \sin^2(t)| \leq 1$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ 2 + \cos(t) \sin^2(t) \end{pmatrix}$

est bien def. et conti. Comme $\cos$ est paire et $\sin$ impaire
 f est impaire. Elle est aussi 2π -périodique car $\sin$
et $\cos$ le sont. On a donc

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_{0-\pi}^{2\pi-\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \stackrel{f \text{ impaire}}{=} 0 !!$$