Retour sur les nombres rationnels :

Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. $\mathbb{Z}$ est muni d'une addition + telle que $(\mathbb{Z}; +)$ est un groupe. $\mathbb{Z}$ est aussi muni d'une multiplication $\times$ qui vérifie certaines propriétés ($(\mathbb{Z}; +, \times)$ est un anneau).

Un nombre rationnel est un ensemble non vide E de couples de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tq.

$$\forall ((p,q);(p';q')) \in E^2, \quad pq' = p'q.$$

Il est noté $\frac{p}{q}$ où $(p;q) \in E$. E est donc l'ensemble de toutes les écritures fractionnaires du nombre rationnel.

Par exemple, l'ensemble E associé à $\frac{1}{2}$ contient

$$\dots ; (-2;-4) ; (-1;-2) ; (1;2) ; (2;4) ; (3;6) ; (4;8) ; \dots$$

ce que l'on peut exprimer par

$$\dots = \frac{-2}{-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots .$$

Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Il se trouve que l'on peut construire deux lois de composition internes sur $\mathbb{Q}$: + et $\times$ de sorte que $(\mathbb{Q}; +; \times)$ soit un corps.

Pour multiplier les rationnels r_1 et r_2, on prend un couple $(p_2; q_2)$ dans l'ens. E associé à r_1 et $(p_2; q_2)$ dans l'ens. E associé à r_2 et on pose

$$r_1 \times r_2 = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}.$$

C'est-à-dire que le rationnel $r_1 + r_2$ regroupe toutes les écritures fractionnaires de $(p_1 p_2; q_1 q_2)$. De même

$$r_1 + r_2 = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}.$$

On peut voir un élé. $n \in \mathbb{Z}$ comme élé. de $\mathbb{Q}$ en l'identifiant à $\frac{n}{1}$.

Fractions rationnelles :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Inspiré par la construction précédente de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$, on suit la même démarche pour construire un ensemble $\mathbb{K}(X)$ de "fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$" à partir de l'ens. des poly. $\mathbb{K}[X]$.

Une fraction rationnelle est donc un ensemble non vide E de couples de $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ t.q.

$$\forall \big((P;Q);(P';Q')\big) \in E^2, \quad P \times Q' = P' \times Q$$

(multiplication des poly. de $\mathbb{K}[X]$).

On note la fraction correspondante $\frac{P}{Q}$.

Sur l'ens. $\mathbb{K}(X)$ de telles fractions rationnelles, on définit une addition et une multiplication par

$$\frac{P_1}{Q_1} * \frac{P_2}{Q_2} := \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2} \quad \text{et} \quad \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}.$$

Il se trouve que $\mathbb{K}(X)$ est un corps avec $\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}}$ (où $\mathbb{1}$ est le poly. constant égale à 1) comme élément neutre de la multiplication et $\frac{0}{\mathbb{1}}$ (où 0 est le poly. nul) comme élément neutre de l'addition.

Fonctions fraction rationnelle :

À chaque fraction rationnelle $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ on peut associer la fonction :

$$f : \mathbb{K} \setminus \{z \in \mathbb{K} ; Q(z) = 0\} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

(fct. poly. associée à P)

Il se trouve que si deux fractions rationnelles F_1 et F_2 produisent ainsi la même fonction alors $F_1 = F_2$.

Pour une telle fonction f, la restriction $f|_{I\cap\mathbb{R}}$ de f à $\mathbb{R}$ est une fonction cont. sur son domaine de définition. Elle admet donc des primitives sur chaque intervalle inclu dans ce domaine. On va voir une méthode générale pour déterminer les primitives d'une telle fonction f.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Soit $F\in\mathbb{C}(X)$. Il existe donc $(P;Q)\in\mathbb{C}[X]\times(\mathbb{C}[X]\setminus\{0\})$ t.q. $F=\frac{P}{Q}$.
Le poly. non nul Q se factorise en un produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire des poly. de deg. 1) :

$$Q=\lambda\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{\alpha_k}$$

où $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a_1;\dots;a_k$ sont des complexes 2 à 2 différents et $\alpha_1;\dots;\alpha_k$ sont dans $\mathbb{N}^*$.

On a le résultat (admis) suivant : Il existe des complexes λ_{ke}, $1\le k\le p$ et $1\le e\le\alpha_k$ et un poly. $E\in\mathbb{C}[X]$ t.q.

$$F=\frac{P}{Q}=E+\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{e=1}^{\alpha_k}\frac{\lambda_{ke}}{(X-a_k)^e}\right)\qquad(*)$$

La somme sur k correspond à la somme sur les facteurs irréductibles qui apparaissent dans la factorisation irréd. de Q. Chaque facteur irréductible $(X-a_k)$ produit une somme dont le nombre de terme est l'ordre de multiplicité de la racine a_k du poly. irréd.

Le poly. E est le quotient de la division eucli. de P par Q. La décomposition est unique à l'ordre près des termes.

Exemple : $P = X^2+1$; $Q = X-1$.

T factorisé en fact. irréd. sur $\mathbb{C}$.
1 seul facteur irréd. donc $p=1$
1 racine simple donc $\alpha_1 = 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^2+1 & X-1 \\ -(X^2-X) & \hline X+1 \leftarrow E. \\ \hline X+1 & \\ -(X-1) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\dfrac{X^2+1}{X-1} = X+1+\dfrac{\lambda}{X-1}$,

On peut calculer λ en posant $X=0$ on obtient

$\dfrac{0+1}{0-1} = 0+1+\dfrac{\lambda}{0-1}$ soit $\lambda = 2$.

Rq. : on peut retrouver ce résultat de la façon suivante :

$$\frac{X^2+1}{X-1} = \frac{X^2-1+2}{X-1} = \frac{(X-1)(X+1)}{X-1} + \frac{2}{X-1} = X+1+\frac{2}{X-1}.$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Il existe $(P;Q) \in \mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0\})$ t.q. $F = \dfrac{P}{Q}$.

Le poly. unitaire Q se factorise en un produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$:

$$Q = \lambda \left(\prod_{k=1}^{p} (X-a_k)^{\alpha_k} \right) \left(\prod_{\ell=1}^{q} (X^2+b_\ell X+c_\ell)^{\beta_\ell} \right)$$

($X^2+b_\ell X+c_\ell \in \mathbb{R}$)

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $a_1, \dots, a_k$ sont les racines 2 à 2 distinctes de Q de multi. respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et les poly. $X^2+b_\ell X+c_\ell$ sont des poly. de deg. 2 sans racine réelle et $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{N}^*$.

On a alors le résultat (admis) suivant :

Il existe $E \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda_{km} \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le p$, $1 \le m \le \alpha_k$
$\mu_{\ell m}, \delta_{\ell m} \in \mathbb{R}$, $1 \le \ell \le q$, $1 \le m \le \beta_\ell$, t.q.

$$F = \frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=1}^{\alpha_k} \frac{\lambda_{kn}}{(X-a_k)^n} \right) + \sum_{l=1}^{q} \left(\sum_{n=1}^{\beta_l} \frac{\mu_{ln} X + \delta_{ln}}{(X^2+b_l X+c_l)^n} \right) \quad (**)$$

E est le quotient de la division eucli. de P par Q.
La décomposition est unique à l'ordre près des termes.

Exemple : $F(X) = \dfrac{X^4+X^2+1}{X(X^2+1)}$ à décomposer sur $\mathbb{R}$.

$X(X^2+1)$ est déjà la fact. irréd. sur $\mathbb{R}$ du dénominateur.

$p=1, q=1$
$\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^4+X^2+1 & X^3+X \\ -(X^4+X^2) & X \leftarrow E \\ \hline 1 & \end{array}$$

Il existe λ, μ et δ de $\mathbb{R}$ t.q.

$$F(X) = \frac{X^4+X^2+1}{X(X^2+1)} = X + \frac{\lambda}{X} + \frac{\mu X+\delta}{X^2+1}.$$

Pour déterminer λ, μ et δ, on peut procéder comme suit :

$$\lambda = \left(X \times F(X) \right)_{|X=0} = \left(X^2 + \lambda + \frac{\mu X+\delta}{X^2+1} \times X \right)_{|X=0} = \lambda + 0$$

$\frac{0+0+1}{0+1}$

donc $\lambda = 1$.

$$\mu i + \delta = \left((X^2+1) F(X) \right)_{|X=i} = \left((X^2+1)\left(X + \frac{\lambda}{X}\right) + \mu X + \delta \right)_{|X=i}$$

$\frac{i^4+i^2+1}{i}$

donc $\mu i + \delta = \frac{1}{i} = -i$. comme $\mu, \delta \in \mathbb{R}^2$, $\delta = 0$ et $\mu = -1$.

D'où $F = X + \dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{X^2+1}$.

(En effet : $X + \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} = \dfrac{X^2(X^2+1) + X^2 + 1 - X^2}{X(X^2+1)} = \dfrac{X^4+X^2+1}{X(X^2+1)}$).

Dans la formule générale, on a une 1ère somme sur les facteurs irréd. (somme sur k et somme sur l) puis chaque facteur irréd. produit une somme dont le nb. de termes dépend de α_k resp. β_l.

Méthodes de calcul explicite :

On appelle décomposition théorique la décomposition donnée par les résultats précédents : (*) et (**).

Par exemple, celle sur $\mathbb{C}$ de $\frac{X^2+1}{X-1}$ est

$$\underbrace{E}_{\in \mathbb{C}[X]} + \frac{\lambda}{X-1} \quad \text{(où } E \text{ et } \lambda \text{ sont encore inconnus).}$$

Celle sur $\mathbb{R}$ de $\frac{X^4+X^2+1}{X(X^2+1)}$ est

$$\underbrace{E}_{\in \mathbb{R}[X]} + \frac{\lambda}{X} + \frac{\mu X+\delta}{X^2+1} \quad \text{(où } E, \lambda, \mu \text{ et } \delta \text{ sont à déterminer).}$$

Il est important de connaître la décomposition théorique pour déterminer la décomposition explicite.

* Calcul de E (la "partie entière" de la fraction) : on effectue la division euclidienne de P par Q. On remarque que si $\deg P < \deg Q$, cette division euclidienne est $P = 0 \times Q + P$ puisque $\deg P < \deg Q$ donc $\underline{E = 0}$.

* Calculs des termes : $\frac{\lambda_{k d_k}}{(X-a_k)^{\alpha_k}}$ et $\frac{\mu_{\ell\beta_\ell} X + \delta_{\ell\beta_\ell}}{(X^2+b_\ell X+c_\ell)^{\beta_\ell}}$.

Ce sont les "derniers" termes de la somme associée à un facteur irréd. On a

$$\lambda_{k d_k} = \left((X-a_k)^{\alpha_k} F(X)\right)\Big|_{X=a_k} \quad \text{et}$$

$$\mu_{\ell\beta_\ell} z_\ell + \delta_{\ell\beta_\ell} = \left((X^2+b_\ell X+c_\ell)^{\beta_\ell} F(X)\right)\Big|_{X=z_\ell} \quad \text{où } z_\ell \text{ est une racine complexe de } X^2+b_\ell X+c_\ell.$$

Exemples :

Sur $\mathbb{C}$: $F = \dfrac{X}{(X-1)^2(X+i)} = \dfrac{P}{Q}$.

$\deg P < \deg Q$ donc $E = 0$. Décomposition théorique :

$F = 0 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X+i}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$.

$b = \left((X-1)^2 F(X)\right)_{|X=1} = \left(\dfrac{X}{X+i}\right)_{|X=1} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{|1+i|^2} = \dfrac{1-i}{2}$

$c = \left((X+i)F(X)\right)_{|X=-i} = \left(\dfrac{X}{(X-1)^2}\right)_{|X=-i} = \dfrac{-i}{(-i-1)^2} = \dfrac{-i}{i^2+2i+1}$

$= \dfrac{-i}{2i} = -\dfrac{1}{2}$.

Pour trouver a, on peut écrire :

$0 = F(0) = \dfrac{a}{-1} + \dfrac{b}{(-1)^2} + \dfrac{c}{i} = -a + b - ic$

donc $a = b - ic = \dfrac{1-i}{2} - i\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Sur $\mathbb{R}$: $F = \dfrac{X^2-3}{(X-1)^2(X^2+1)} = \dfrac{P}{Q}$.

$\deg P < \deg Q$ donc $E = 0$. Décomp. théorique :

$F = 0 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{cX+d}{X^2+1}$, $a; b; c; d \in \mathbb{R}$.

On a : $b = \left((X-1)^2 F(X)\right)_{|X=1} = \left(\dfrac{X^2-3}{X^2+1}\right)_{|X=1} = \dfrac{-2}{2} = -1$,

$ci + d = \left((X^2+1)F(X)\right)_{|X=i} = \left(\dfrac{X^2-3}{(X-1)^2}\right)_{|X=i} = \dfrac{-1-3}{i^2-2i+1} = \dfrac{-4}{-2i} =$

Donc $c = -2$ et $d = 0$.

Pour déterminer a, on peut écrire, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$,

$$\frac{a}{1-\frac{1}{x}} + \frac{b}{x(1-\frac{1}{x})^2} + \frac{c+\frac{d}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = xF(x) = \frac{x^3(1-\frac{3}{x})}{x^4(1-\frac{1}{x})^2(1+\frac{1}{x^2})} \to 0 \quad x\to+\infty$$

$\downarrow x\to+\infty$ $\downarrow x\to+\infty$ $\downarrow x\to+\infty$

a 0 c

donc $a+c=0$ et $a=-c=2$.

2.7. (b) décompositions théoriques :

$$F_1(x) = \frac{X}{X^4-1} = \frac{X}{(X^2)^2-1} = \frac{X}{(X^2-1)(X^2+1)} = \frac{X}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} \leftarrow \text{fact. irréd. sur } \mathbb{R}$$

sur $\mathbb{R}$: $F_1 = \underset{(=0)}{E} + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}^2$

sur $\mathbb{C}$: $F_1 = \frac{X}{(X-1)(X+1)(X-iX+i)}$ donc

$$F_1 = \underset{(=0)}{E} + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X-i} + \frac{\delta}{X+i}, \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}.$$

$$F_2(X) = \frac{X^2}{(X-1)(X+1)(X-1)(X+2)} = \frac{X^2}{(X-1)^2(X+1)(X+2)}$$

$$= \underset{(=0)}{E} + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{X+2}$$

avec $a;b;c;d \in \mathbb{R}$ par la décomp. sur $\mathbb{R}$.

c'est la m. sur $\mathbb{C}$.

Comme $(X^4-16)^2 = ((X^2)^2-16)^2 = ((X^2-4)(X^2+4))^2$

$$= [(X-2)(X+2)(X^2+4)]^2$$

sur $\mathbb{R}$ ↙ sur $\mathbb{C}$ ↘

$= (X-2)^2(X+2)^2(X^2+4)^2$ irréd.

$(X-2)^2(X+2)^2(X-2i)^2(X+2i)^2$.

Donc, sur $\mathbb{R}$, $\in \mathbb{R}$

$$F_3 = \underbrace{E}_{(=0)} + \frac{a_1}{X-2} + \frac{a_2}{(X-2)^2} + \frac{b_1}{X+2} + \frac{b_2}{(X+2)^2} + \frac{c_1X+d_1}{X^2+4} + \frac{c_2X+d_2}{(X^2+4)^2}.$$

Sur $\mathbb{C}$, $\in \mathbb{C}$

$$F_3 = \underbrace{E}_{(=0)} + \frac{a_1'}{X-2} + \frac{a_2'}{(X-2)^2} + \frac{b_1'}{X+2} + \frac{b_2'}{(X+2)^2} + \frac{c_1'}{X-2i} + \frac{c_1'}{(X-2i)^2} + \frac{d_2'}{X+2i} + \frac{d_2'}{(X+2i)^2}$$

On a $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$ irréd. sur $\mathbb{R}^2$

$= (X-1)(X-j)(X-\bar{j})$ irréd. sur $\mathbb{C}$.

Donc, sur $\mathbb{R}$,

$$F_4 = \underbrace{E}_{\in \mathbb{R}[X]\ (\neq 0!)} + \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}^2.$$

Sur $\mathbb{C}$,

$$F_4 = \underbrace{E}_{\in \mathbb{C}[X]} + \frac{a'}{X-1} + \frac{b'}{X-j} + \frac{c'}{X+j}, \quad a',b',c' \in \mathbb{C}.$$

(c) décompositions explicites sur $\mathbb{R}$

décomp. théo. de F_1 : $F_1(X) = E_1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$.

X^3 | X^2-3X+2

$-(X^3-3X^2+4)$ | $X+3 = E_1$

$3X^2-2X$

$a = \left((X-1)F_1(X)\right)\Big|_{X=1} = \frac{1}{-1} = -1.$

$b = \left((X-2)F_1(X)\right)\Big|_{X=2} = \frac{2^3}{1} = 8.$

D'où $F_1(X) = X+3 - \frac{1}{X-1} + \frac{8}{X-2}$.

décomp. théo. de F_2 : $F_2(X) = \underbrace{E_2}_{(=0)} + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2}$.

$b = \left((X-1)^2 F_2(X)\right)\Big|_{X=1} = \frac{1}{-1} = -1$, $c = \left((X-2)F_2(X)\right)\Big|_{X=2} = \frac{2^2}{1^2} = 4$.

Pour déterminer a, vrai 2 méthodes :

* $0 = F_2(0) = \frac{a}{-1} + \frac{b}{1} + \frac{c}{-2}$

donc $a = b - \frac{c}{2} = -1 - \frac{4}{2} = -3$.

* Pour $|x| > 2$, on a

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{x^3}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = x F_2(x) = \frac{a}{1-\frac{1}{x}} + \frac{b}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{c}{1-\frac{2}{x}}$$

$\downarrow x \to +\infty$ (left) $\quad \downarrow x \to +\infty$ (right)

$1 \qquad a+0+c$.

Donc $a + c = 1$ soit $a = 1 - c = 1 - 4 = -3$.

déc. théo. de F_3 : $F_3(X) = 0 + \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{c}{X-2}$.

$$ai + b = \left((X^2+1)F_3(X)\right)_{|X=i} = \frac{5i^2}{i-2} = \frac{-5(-i-2)}{|i-2|^2} = \frac{5(i+2)}{5} = i+2.$$

donc $a = 1$ et $b = 2$.

$$c = \left((X-2)F_3(X)\right)_{|X=2} = \frac{5 \times 2^2}{4+1} = 4.$$

(e) décomposition dans $\mathbb{R}$.

déc. théo. de F_1 : $F_1(X) = 0 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$.

Donc $a = \left((X-1)F_1(X)\right)_{|X=1} = \frac{2}{2} = 1$.

$b = \left((X-2)F_1(X)\right)_{|X=2} = \frac{5}{-1} = -5$

$c = \left((X-3)F_1(X)\right)_{|X=3} = \frac{10}{2 \times 1} = 5$.

déc. théo. de F_2 : $F_2(X) = 0 + \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$.

Donc $a = \left(XF_2(X)\right)_{|X=0} = 1$, $c = \left((X-1)^2 F_2(X)\right)_{|X=1} = 1$.

Pour $|x|>2$,

$$0 \xleftarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = x\,F_3(x) = \underbrace{a + \frac{b}{1-\frac{1}{x}} + \frac{c}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}_{\downarrow\, x\to+\infty \;\; a+b}$$

D'où $a+b=0$ et $b=-a=-1$.

décomp. théo. de F_3 : $F_3(x) = E_3(x) + \frac{ax+b}{x^2+1}$.

$$\begin{array}{r|l} X^7+1 & X^2+1 \\ -(X^7+X^5) & \hline & X^5-X^3+X = E_3(X). \\ \hline -X^5+1 & \\ -(-X^5-X^3) & \\ \hline X^3+1 & \\ -(X^3+X) & \\ \hline -X+1 & \end{array}$$

Donc $F_3(X) = \dfrac{(X^2+1)E_3(X) + 1 - X}{X^2+1}$

$= E_3(X) + \dfrac{1-X}{X^2+1}$

On reconnaît la décomp. en él. simples !.

décomposition théo. de F_4 : $F_4(X) = \dfrac{X+1}{X^2(X^2+1)}$.

$$F_4(X) = 0 + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

On a $b = \left(X^2 F_4(X)\right)_{|X=0} = 1$, $ci+d = \left((X^2+1)F_4(X)\right)_{|X=i} = \frac{i+1}{-1}$

$= -i-1$

donc $c=-1$ et $d=-1$.

Pour $|x|>0$, $\frac{1}{x^2} \times \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = x\,F_4(x) = \underbrace{a + \frac{b}{x} + \frac{c+\frac{d}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}}_{\downarrow\, x\to+\infty \;\; a+c}$

$\downarrow x\to+\infty$ (0)

d'où $a+c=0$ et $a=-c=1$.

Décomp. théo. de F_5 : $f_5(X) = 0 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3}$

On a $c = \left((X-1)^3 F_5(X)\right)\Big|_{X=1} = 1$.

Deux méthodes pour calculer a et b :

* $0 = F_5(0) = \frac{a}{-1} + \frac{b}{1} + \frac{c}{-1}$ donc $1 = b - a$.

et, pour $|x| > 1$,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{x^3}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} = x F_5(x) = \underbrace{\frac{a}{1-\frac{1}{x}} + \frac{b}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{c}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}}_{\xrightarrow{x\to+\infty} a}$$

$\downarrow x\to+\infty$: 1

D'où $a = 1$ et $b = a + 1 = 2$.

* Soit $G_5(X) = F_5(X) - \frac{1}{(X-1)^3}$

$$= \frac{X^2 - 1}{(X-1)^3} = \frac{(X-1)(X+1)}{(X-1)^3}$$

simplification obligatoire ! $\rightarrow$

$$= \frac{X+1}{(X-1)^2} \cdot 1$$

On a $G_5(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}$ et c'est la décomp. en élé. simples de $\frac{X+1}{(X-1)^2}$.

Donc $b = \left((X-1)^2 G_5(X)\right)\Big|_{X=1} = 2$ et

$$1 = G_5(0) = \frac{a}{-1} + \frac{b}{1}$$

d'où $a = 1$.

Compléments : quelques méthodes de calcul de décomp. en élé. simples.

2.22 (a).

$$2X^5+19X^4+76X^3+157X^2+165X+72 \;\big|\; X^2+4X+5 \quad (\text{irréd. sur } \mathbb{R}!)$$
$$-(2X^5+8X^4+10X^3) \qquad 2X^3+11X^2+22X+14 = P_1$$
$$11X^4+66X^3+157X^2+165X+72$$
$$-(11X^4+44X^3+55X^2)$$
$$22X^3+102X^2+165X+72$$
$$-(22X^3+88X^2+110X)$$
$$14X^2+55X+72$$
$$-(14X^2+56X+70)$$
$$-X+2 = R.$$

$$2X^3+11X^2+22X+14 \;\big|\; X^2+4X+5$$
$$-(2X^3+8X^2+10X) \qquad 2X+3 = P_2$$
$$3X^2+12X+14$$
$$-(3X^2+12X+15)$$
$$-1 \leftarrow R_0.$$

Donc
$$F=\frac{P}{Q^3}=\frac{QP_2+R}{Q^3}=\frac{R}{Q^3}+\frac{QP_2+R_0}{Q^2}$$
$$=\frac{R}{Q^3}+\frac{R_0}{Q^2}+\frac{P_2}{Q}$$
$$=\frac{2X+3}{X^2+4X+5}+\frac{-1}{(X^2+4X+5)^2}+\frac{-X+2}{(X^2+4X+5)^3},$$

On reconnaît la décomp. en élé. simples de F sur $\mathbb{R}$.

(c) $F_n(X) = \dfrac{X^{2n}}{(X^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La décomp. théo. sur $\mathbb{R}$ est :

$$F_n(X) = \underset{\in \mathbb{R}[X]}{E_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k X + b_k}{(X^2+1)^k},$$

Or a $F_n(X) = \dfrac{(X^2+1-1)^n}{(X^2+1)^n}$

$$= \frac{1}{(X^2+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X^2+1)^{n-k} (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{(X^2+1)^k}.$$

On reconnaît la décomp. en élé. simples.

$$E_n = \binom{n}{0} (-1)^0 = 1.$$

pour $1 \le k \le n$, $b_k = (-1)^k \binom{n}{k}$ et $a_k = 0$.

Ex. 8 (feuille suppl.)

1 - Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ $\Rightarrow (X-a) R + R_0$ la div. eucl. de Q par $X-a$. Donc $\deg R_0 < \deg(X-a) = 1$. R_0 est un poly. constant. Comme $0 = Q(a) = 0 + R_0$, $R_0 = 0$ donc $Q = (X-a) R$. De plus, $Q' = R + (X-a) R'$. donc $Q'(a) = R(a) \neq 0$ par hyp.

2 - (on devine que $b = \frac{P(a)}{R(a)}$ et $(X-a) T(X) = P - P(a)$).

Comme $P - P(a)$ s'annule en a, il existe $T_0 \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $P - P(a) = (X-a) T_0(X)$. Soit $b = \dfrac{P(a)}{R(a)}$

Comme $R - R(a)$ s'annule en a, il existe $T_1 \in \mathbb{R}[X]$ tq.

$R - R(a) = (X-a)\,T_1(X)$

d'où $P = P - P(a) + P(a) = (X-a)\,T_0(X) + bR(a)$

$= (X-a)\,T_0(X) + b\,(R - (X-a)T_1(X))$

$= bR + (X-a)\underbrace{(T_0(X) - bT_1(X))}_{= T(X) \in \mathbb{R}[X]}$.

3- Comme $Q'(a) = R(a)$, on a $b = \dfrac{P(a)}{R(a)} = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

De plus

$$\frac{P}{(X-a)R} = \frac{bR + (X-a)T}{(X-a)R} = \frac{b}{X-a} + \frac{T}{R}.$$

4- Dans la fact. irréd. (sur $\mathbb{R}$) de Q, $(X-a)$ apparaît exactement une fois car $Q(a)=0$ mais $Q'(a) \neq 0$. Donc, la contribution de ce facteur irréd. dans la décomp. en élé. simples de Q sur $\mathbb{C}$ est $\dfrac{\lambda}{X-a}$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.

On sait que $\lambda = \left((X-a)\dfrac{P}{Q}\right)_{|X=a} = \left(\dfrac{P}{R}\right)_{X=a} = \dfrac{P(a)}{R(a)} = b = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

5- Soit $Q_n(X) = X^n - 1$. Les racines de Q_n sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $0 \leq k \leq n-1$. Il y en a n et elles sont 2 à 2 différentes donc elles sont toutes simples. Donc

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)^1.$$

Décomp. théo. de F : $F(X) = 0 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\lambda_k}{X - \omega_k}$.

Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!] \cap \mathbb{N}^*$, on peut appliquer les résultats précédents avec $a = \omega_k$ et $P = 1$. On en déduit que

$$\lambda_k = \frac{1}{Q_n'(\omega_k)} = \frac{1}{n\,\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n} \quad !!\ldots$$

Les exercices 9 et 10 de la feuille supplémentaires donnent d'autres méthodes pour déterminer explicitement certaines décomp. en élé simples.

Applications de la décomposition en élé. simples :

* on l'utilisera très souvent pour déterminer les primitives d'une fonction fraction rationnelle

* 2.22. (b). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. On souhaite calculer S_n en fonct. de n. Soit $F(X) = \frac{1}{X(X+1)}$. Sa décomp. théorique sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est $\frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$.

On a $a = (XF(X))_{|X=0} = 1$ et $b = ((X+1)F(X))_{|X=-1} = -1$.

Donc $F(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$. D'où

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\ell} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

On remarque que $(S_n)_n$ est convergente vers 1.

* Ex. 11 (feuille suppl.). Il semble difficile de deviner une formule pour $f^{(n)}$. On décompose $\frac{1}{X^2+1}$ en élé. simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{X^2+1} = \left(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \right) \frac{1}{2i}. \text{ Donc, pour } x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right).$$

Or, pour $p \in \mathbb{N}$, et $\varepsilon \in \{-1;1\}$, $\left(\frac{d}{dx}\right)^p \left((x+i\varepsilon)^{-1} \right) = (-1)^p p! (x+i\varepsilon)^{-1-p}$ (récurrence)

donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[(x-i)^{-1-n} - (x+i)^{-1-n} \right]$.