Calculus 6.

Primitives de fonctions fractions rationnelles.

On désigne par le même symbole une fraction rationnelle et sa fonction fraction rationnelle associée définie sur une partie de $\mathbb{R}$. Même pour les polynômes et leurs fonctions polynômes associées.

Soit $F : \mathbb{R} \setminus Q^{-1}(\{0\}) \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.

On cherche à déterminer explicitement les primitives de f sur un int. $I \subset \mathbb{R} \setminus Q^{-1}(\{0\})$.

Méthode générale : on effectue la décomp. en élé. simples de F et on détermine les primitives des élé. simples.

Primitives des éléments simples :

Pour $p \in \mathbb{N}$, on a, sur $I \subset \mathbb{R}$, $\int_a^x t^p \, dt = \frac{x^{p+1}}{p+1} + k$.

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, on a, sur $I \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^p} = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} + k$ si $p \neq 1$,
$= \ln|x-a| + k$ si $p = 1$.

Attention : si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}\left(\ln|x-a|\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left((x-\mathrm{Re}(a))^2 + \mathrm{Im}^2(a)\right)\right)$
$= \frac{1}{2} \frac{2(x-\mathrm{Re}(a))}{(x-\mathrm{Re}(a))^2 + \mathrm{Im}^2(a)} = \mathrm{Re}\left(\frac{x-a}{|x-a|^2}\right)$
$\neq \frac{1}{x-a}$ car $\in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{x-a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

De plus, "$\ln(x-a)$" n'a pas de sens !

Il reste à voir les élé. simples du type :

$\mathbb{R} \ni x \mapsto \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ avec $\Delta = p^2-4q < 0$, $a,b,p,q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cas $n=1$: On recommande de suivre à chaque fois la démarche suivante :

$$\int^x \frac{at+b}{t^2+pt+q}\,dt = \frac{a}{2}\int^x \frac{2t}{t^2+pt+q}\,dt + b\int^x \frac{dt}{t^2+pt+q} = \frac{a}{2}\int^x \frac{2t+p}{t^2+pt+q}\,dt + \left(b-\frac{a}{2}p\right)\int^x \frac{dt}{t^2+pt+q}$$

On utilise le "at" du numérateur pour faire apparaître la dérivée du dénominateur.

On a $\displaystyle\int^x \frac{2t+p}{t^2+tp+q}\,dt = \int^{\varphi(x)} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt$ où $\varphi(t) = t^2+tp+q$ est C^1

Donc, par chang. de var., $\displaystyle\int^x \frac{2t+p}{t^2+tp+q}\,dt = \int^{\varphi(x)} \frac{du}{u} = \ln|\varphi(x)| + K$

$= \ln(\varphi(x)) + K$

(car φ est strict. positive !)

D'autre part,

$$\int^x \frac{dt}{t^2+pt+q} = \int^x \frac{dt}{\left(t+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}+q} = \int^x \frac{dt}{\left(t+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}}$$

$$= \frac{4}{-\Delta}\int^x \frac{dt}{\frac{4}{-\Delta}\left(t+\frac{p}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{-\Delta}\int^x \frac{dt}{\left(\frac{2t+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\int^x \frac{\psi'(t)\,dt}{\psi(t)^2+1} \quad \text{où } \psi(t) = \frac{2t+p}{\sqrt{-\Delta}} \text{ est } C^1.$$

Par chang. de var.,

$$\int^x \frac{dt}{t^2+pt+q} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\int^{\psi(x)} \frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{Arctan}(\psi(x)) + K$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right) + K.$$

Rq : Si $a = b+ic$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire, $\forall I \subset \mathbb{R}$

$$\int^x \frac{dt}{t-a} = \int^x \frac{\overline{(t-a)}}{|t-a|^2}\,dt = \int^x \frac{(t-\bar{a})}{(t-b)^2+c^2}\,dt = \int^x \frac{t-b}{(t-b)^2+c^2}\,dt + ic\int^x \frac{dt}{(t-b)^2+c^2}$$

et on est ramené au cas étudié ci-dessus.

Cas $n>1$: Comme ci-dessus, on a

$$\int^x \frac{at+b}{(t^2+pt+q)^n}\,dt = \frac{a}{2}\int^x \frac{2t+p}{(t^2+pt+q)^n}\,dt + \left(b-\frac{a}{2}p\right)\int^x \frac{dt}{(t^2+pt+q)^n}$$

On a $\int^x \frac{2t+p}{(t^2+pt+q)^n}\,dt = \int^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^n}\,dt$ où $\varphi(t)=t^2+pt+q$ et $c\in\mathbb{R}$

donc, par chang. de var, $\int^x \frac{2t+p}{(t^2+pt+q)^n}\,dt = \int^{\varphi(x)} \frac{du}{u^n} = \left[\frac{u^{1-n}}{1-n}\right]^{\varphi(x)}$

$$= \frac{-1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + K.$$

Pour le dernier terme, on introduit, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$I_n(x) = \int^x \frac{dt}{(t^2+pt+q)^n}$$

on cherche, via une IPP, une relation entre I_n et I_{n+1}.

Comme on sait calculer $I_1(x)$ la relation préc. permettra de calculer $I_2(x)$, puis $I_3(x)$, etc... .

Une façon commode de faire cela consiste à d'abord transformer t^2+pt+1 en $\left(\frac{2t+1}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1$ (comme ci-avant).

On a :

$$\int^x \frac{dt}{(t^2+pt+q)^n} = \int^x \frac{dt}{\left[(t+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4}+q\right]^n} = \int^x \frac{dt}{\left[(t+\frac{p}{2})^2 + \frac{-\Delta}{4}\right]^n}$$

$$= \left(\frac{4}{-\Delta}\right)^n \int^x \frac{dt}{\left[\frac{4}{-\Delta}(t+\frac{p}{2})^2+1\right]^n} = \left(\frac{4}{-\Delta}\right)^n \int^x \frac{dt}{\left[\left(\frac{2t+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right]^n}$$

$$= \left(\frac{4}{-\Delta}\right)^{n-1} \times \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \int^x \frac{\varphi'(t)\,dt}{(\varphi(t)^2+1)^n} \quad \text{où } \varphi(t)=\frac{2t+p}{\sqrt{-1}} \text{ et } c=$$

$$= \left(\frac{4}{-\Delta}\right)^{n-1} \times \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \int^{\varphi(x)} \frac{du}{(u^2+1)^n}.$$

On pose $J_n(y) = \int^y \frac{du}{(u^2+1)^n}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$, et on cherche une relation entre J_n et J_{n+1} : IPP.

$$J_n(y) = \int^y \frac{(u)'}{(u^2+1)^n}\,dt = \left[\frac{u}{(u^2+1)^n}\right]^y - \int^y u \times \frac{(-n)}{(u^2+1)^{n+1}} \times 2u\,du$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n \int^y \frac{u^2}{(u^2+1)^{n+1}}\,du = \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n\left[\int^y \frac{u^2+1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du - \int^y \frac{du}{(u^2+1)^{n+1}}\,du\right]$$

Soit $J_n(y) = \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n J_n(y) - 2n J_{n+1}(y)$

d'où $2n J_{n+1}(y) = \frac{y}{(y^2+1)^n} + (2n-1) J_n(y)$. (*)

On calcule $J_n(y)$ en calculant $J_1(y)$ et en utilisant (*) plusieurs fois. Voir un exemple ci-dessous.

Exemples : sur $I \subset \mathbb{R} - \{2\}$, $\int^x \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + K = -\frac{1}{x-2} + K$.

sur $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\int^x \frac{dt}{t^7} = \frac{x^{-6}}{-6} + K = -\frac{1}{6x^6} + K$,

sur $I \subset \mathbb{R}$, $\int^x (t^3+3t+1)dt = \int^x t^3 dt + 3\int^x t\,dt + \int^x dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]^x + 3\left[\frac{t^2}{2}\right]^x + [t]^x$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 + x + K$.

sur $I \subset \mathbb{R}$, $\int^x \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int^x \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2+1} dt$

où $\varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$ est C^1. Par chang. de var.,

$\int^x \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int^{\varphi(x)} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\varphi(x)) + K = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K$.

sur $I \subset \mathbb{R}$ $\int^x \frac{t\,dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{t^2+2} dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$ où

$\varphi(t) = t^2+2$ est C^1. Par chang. de var.,

$\int^x \frac{t\,dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int^{\varphi(x)} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|\varphi(x)| + K = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + K$.

sur $I \subset \mathbb{R}$, $\int^x \frac{dt}{t^2+t+1} = \int^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

$= \frac{4}{3}\int^x \frac{dt}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} = \frac{4}{3}\int^x \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \int^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2+1}$ où $\varphi(t) = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ est C^1.

ch. de var. $= \frac{2}{\sqrt{3}}\int^{\varphi(x)} \frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K$.

sur $I \subset \mathbb{R}$, $\int^x \frac{t+1}{t^2+2} dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{t^2+2} dt + \int^x \frac{dt}{t^2+2}$ et

d'après ce qui précède

$\int^x \frac{t+1}{t^2+2} dt = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K$.

Sur $I \subset \mathbb{R}$,

$$\int^x \frac{dt}{(t^2+2)^3} = ?$$

On pose $J_n(x) = \int^x \frac{dt}{(t^2+2)^n}$.

On a vu que $J_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K$.

On a

$$J_1(x) = \int^x \frac{(t)'}{t^2+2}\,dt \overset{IPP}{=} \frac{x}{x^2+2} - \int^x \frac{t \times (-1) \times 2t}{(t^2+2)^2}\,dt$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + 2\int^x \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+2} + 2\left[\int^x \frac{t^2+2}{(t^2+2)^2}\,dt - \int^x \frac{2\,dt}{(t^2+2)^2}\right]$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + 2J_1(x) - 4J_2(x)$$

donc $4J_2(x) = \frac{x}{x^2+2} + J_1(x)$.

De plus

$$J_2(x) = \int^x \frac{(t)'\,dt}{(t^2+2)^2} \overset{IPP}{=} \frac{x}{(x^2+2)^2} - \int^x \frac{t \times (-2) \times (2t)}{(t^2+2)^3}\,dt$$

$$= \frac{x}{(x^2+2)^2} + 4\int^x \frac{t^2}{(t^2+2)^3}\,dt$$

$$= \frac{x}{(x^2+2)^2} + 4\left[\int^x \frac{t^2+2}{(t^2+2)^3}\,dt - \int^x \frac{2\,dt}{(t^2+2)^3}\right]$$

$$= \frac{x}{(x^2+2)^2} + 4J_2(x) - 8J_3(x).$$

Donc $8J_3(x) = \frac{x}{(x^2+2)^2} + 3J_2(x)$.

Donc

$$J_3(x) = \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4}J_1(x)\right)$$

Int

$$= \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3x}{32(x^2+2)} + \frac{3}{32} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K.$$

Ex. 2.14 :

1). On a $F(x) = \frac{X^2+3X+1}{X(X+1)} = E(X) + \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$

(décomp. en élé. simples dans $\mathbb{R}$).

⚠ Pour tout déplacement à l'étranger lire l'onglet "Info Mission à l'étranger"

On a $X^2+3X+1 = (X^2+X)\times 1 + 2X+1$ div. eucl.

Donc $E(X)=1$. De plus, $a = (XF(X))_{|X=0} = 1$ et

$b = ((X+1)F(X))_{|X=-1} = 1$. Donc

$$F(X) = 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1}.$$

Donc, sur $I \subset \mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, on a

$$\int^x \frac{t^2+3t+1}{t(t+1)}\,dt = \int^x dt + \int^x \frac{dt}{t} + \int^x \frac{dt}{t+1}$$
$$= x + \ln|x| + \ln|x+1| + K.$$

Attention si $I \subset]-1;0[$, on a

$$\int^x \frac{t^2+3t+1}{t(t+1)}\,dt = x + \ln(-x) + \ln(1+x) + K.$$

2). On a $F(X) = \dfrac{X^6+X^2}{X^2+3} = E(X) + \dfrac{aX+b}{X^2+3}$ (décomp. théo. sur $\mathbb{R}$).

$$\begin{array}{r|l} X^6+X^2 & X^2+3 \\ \hline -(X^6+3X^4) & X^4-3X^2+10 \\ \hline -3X^4+X^2 & \\ -(-3X^4-9X^2) & \\ \hline 10X^2 & \\ -(10X^2+30) & \\ \hline -30 & \end{array}$$

$= \uparrow E$

Donc $F(X) = X^4-3X^2+10 - \dfrac{30}{X^2+3}$.

On reconnaît la décomp. en éléments simples!

$(a=0$ et $b=-30)$.

Sur $I \subset \mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x \frac{t^6+t^2}{t^2+3}\,dt = \underbrace{\int^x (t^4-3t^2+10)\,dt}_{\to \frac{x^5}{5}-x^3+10x+K_1} - 30\int^x \frac{dt}{t^2+3}$.

De plus,

$$\int^x \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{3}\int^x \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2+1}\,dt \quad \text{où } \varphi(t)=\frac{t}{\sqrt{3}} \text{ est } C^1$$

ch. de var. $= \dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int^{\varphi(x)} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + K_2$.

3). On suppose $a \neq b$ et réels. On pose :

$$F(X) = \frac{X^2}{(X-a)^2(X-b)} = 0 + \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\mu}{(X-a)^2} + \frac{\partial}{X-b}.$$

On a $\partial = \left((X-b)F(X)\right)_{X=b} = \frac{b^2}{(b-a)^2}$; $\mu = \left((X-a)^2 F(X)\right)_{|X=a} = \frac{a^2}{a-b}$

et, pour $|x| > \max(|a|, |b|)$,

$$\frac{1}{(1-\frac{a}{x})^2(1-\frac{b}{x})} = xF(x) = \underbrace{\frac{\lambda}{1-\frac{a}{x}} + \frac{\mu}{x(1-\frac{a}{x})^2} + \frac{\partial}{1-\frac{b}{x}}}_{\downarrow x \to +\infty \quad \lambda + \partial}$$

$\downarrow x \to +\infty$

1 donc $\lambda + \partial = 1$ d'où $\lambda = 1 - \frac{b^2}{(b-a)^2}$

$$= \frac{-a(2b-a)}{(b-a)^2}$$

Pour $I \subset \mathbb{R} \setminus \{a; b\}$, on a

$$\int_I \frac{t^2}{(t-a)^2(t-b)}\,dt = \lambda \ln|x-a| - \mu(x-a)^{-1} + \partial \ln|x-b| + K.$$

On suppose $a = b \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$F(X) = \frac{X^2}{(X-a)^3} = 0 + \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{(X-a)^2} + \frac{\gamma}{(X-a)^3}.$$

On a $\gamma = \left((X-a)^3 F(X)\right)_{|X=a} = a^2$.

$0 = F(0) = \frac{\alpha}{-a} + \frac{\beta}{a^2} + \frac{\gamma}{-a^3}$ donc $-a\alpha + \beta = \frac{\gamma}{a} = a$.

Pour $|x| > |a|$,

$$\underbrace{\frac{1}{(1-\frac{a}{x})^3}}_{1 \text{ quand } x \to +\infty} = xF(x) = \underbrace{\frac{\alpha}{1-\frac{a}{x}} + \frac{\beta}{x(1-\frac{a}{x})^2} + \frac{\gamma}{x^2(1-\frac{a}{x})^3}}_{\downarrow \alpha \quad x \to +\infty}$$

donc $\alpha = 1$, d'où $\beta = 2a$.

On suppose $a = b = 0$. On a, sur $I \subset \mathbb{R}^*$,

$$\int^x \frac{dt}{t^3} = \frac{x^{-2}}{-2} + K.$$

4). Soit $F(x) = \frac{1}{2x^2+3x-1}$. On a $\Delta = 3^2+4\times 2 = 17$.

1) Une $Q(x) = 2x^2+3x-1 = 2\left(x - \underbrace{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}}_{t_1}\right)\left(x - \underbrace{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}}_{t_2}\right)$.

La décomposition thés. sur $\mathbb{R}$ est :

$$F(x) = 0 + \frac{\lambda}{x-t_1} + \frac{\mu}{x-t_2}$$

Par l'ex. 8 (feuille suppl.), $\lambda = \frac{1}{Q'(t_1)} = \frac{1}{4t_1+3}$ et $\mu = \frac{1}{Q'(t_2)} = \frac{1}{4t_2+3}$

Sur $I \subset \mathbb{R}\setminus\{t_1;t_2\}$,

$$\int_0^x \frac{dt}{2t^2+3t-1} = \lambda \int_0^x \frac{dt}{t-t_1} + \mu \int_0^x \frac{dt}{t-t_2} = \lambda \ln|x-t_1| + \mu \ln|x-t_2| + K.$$

5). Soit $F(x) = \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = 0 + \frac{\lambda}{x-1} + \frac{\mu}{x+3}$.

On a $\lambda = \left((x-1)F(x)\right)_{|x=1} = \frac{1}{4}$ et $\mu = \left((x+3)F(x)\right)_{|x=-3} = -\frac{1}{4}$.

Sur $I \subset \mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$,

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+2t-3} = \lambda \int_0^x \frac{dt}{t-1} + \mu \int_0^x \frac{dt}{t+3} = \frac{1}{4}\left(\ln|x-1| - \ln|x+3|\right) + K$$

6). Soit $F(x) = \frac{x^3-2}{x^3-x^2} = \frac{x^3-2}{x^2(x-1)} = E(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$.
décomp. thés. sur $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2 & x^3-x^2 \\ -(x^3-x^2) & 1 = E. \\ \hline x^2-2 & \end{array}$$

De plus, $c = \left(x^2F(x)\right)_{|x=0} = 2$ et

$a = \left((x-1)F(x)\right)_{|x=1} = -1$.

Par $|x|>1$, on a :

$$\frac{x(x^2-2)}{x^2(x-1)} = \frac{x\left[x^3-x-(x^3-x^2)\right]}{x^2(x-1)} = x\left(F(x)-E(x)\right) = \frac{a}{1-\frac{1}{x}} + b + \frac{c}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a+b$$

$\frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \downarrow 1$ quand $x\to+\infty$

Donc $b = 1-a = 2$.

Sur $I \subset \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, on a

$$\int_0^x \frac{t^3-2}{t^3-t^2}dt = \int_0^x dt - \int_0^x \frac{dt}{t-1} + 2\int_0^x \frac{dt}{t} + 2\int_0^x \frac{dt}{t^2} = x - \ln|x-1| + 2\ln|x| - \frac{2}{x} + K.$$

8). Soit $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = X^3$ et $Q(x) = X^4+3X^2+2$.

On doit factoriser Q sur $\mathbb{R}^2$. On a $Q(x) = Q_1(X^2)$

où $Q_1(Y) = Y^2+3Y+2$. $\Delta = 9-8 = 1$. Donc

$Q_1(Y) = 1(Y+1)(Y+2)$. D'où

$Q(x) = (X^2+1)(X^2+2)$ (irréd. sur $\mathbb{R}^2$).

fact.

On a

$$F(x) = 0 + \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+2},$$

On a : $ai+b = \left((X^2+1)F(x)\right)_{|X=i} = \frac{-i}{-1+2} = -i$.

Donc $a=-1$ et $b=0$. On a $c\,i\sqrt{2}+d = \left((X^2+2)F(x)\right)_{|X=i\sqrt{2}} = \frac{-i\,2^{3/2}}{-1}$

donc $d=0$ et $c = \frac{2^{3/2}}{2^{1/2}} = 2$.

Donc, sur $I \subset \mathbb{R}$,

$$\int_x^x \frac{t^3}{t^4+3t^2+2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_x^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int_x^x \frac{2t}{t^2+2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln(x^2+2) + K.$$

Ex. 2.8. Sur $I \subset]1;+\infty[$,

$$\int_y^y \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,dx = \int_y^y \frac{\sqrt{x-1}\times 2\sqrt{x-1}}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$= \int_y^y \frac{2\varphi(x)^2}{\varphi(x)^2+2}\,\varphi'(x)\,dx \text{ où } \varphi(x) = \sqrt{x-1} \text{ est } C^1 \text{ sur } I.$$

ch. de var.

$$= \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y)} \frac{2u^2}{u^2+2}\,du = 2\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y)} \frac{u^2+2-2}{u^2+2}\,du = 2\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y)} du - 4\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y)} \frac{du}{u^2+2}.$$

On a $\int_v^v \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{2}\int_v^v \frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_v^v \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}du}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + K_1$.

Donc $\int^y \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}dx = 2\varphi(y) - 2\sqrt{2}\,\text{Arctan}\left(\frac{\varphi(y)}{\sqrt{2}}\right)+k$

$= 2\sqrt{y-1} - 2\sqrt{2}\,\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)+k.$

Ex. 2.10.

$$\int^x \frac{1}{t+i}dt = \int^x \frac{t-i}{|t+i|^2}dt = \int^x \frac{t}{t^2+1}dt - i\int^x \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - i\,\text{Arctan}(x)+k.$$

$$\int^x te^{it}dt = \int^x t\left(\frac{e^{it}}{i}\right)'dt \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{te^{it}}{i}\right]^x - \int^x 1\times\frac{e^{it}}{i}dt$$

$$= -ixe^{ix} + i\left[\frac{e^{it}}{i}\right]^x = -ixe^{ix}+e^{ix}+k.$$

$$\int^x \cos(t)e^{2t}dt = \int^x \text{Re}\left(e^{it}e^{2t}\right)dt = \text{Re}\left(\int^x e^{(i+2)t}dt\right)$$

$$= \text{Re}\left(\left[\frac{e^{(i+2)t}}{i+2}\right]^x\right) = \text{Re}\left(\frac{e^{(i+2)x}}{i+2}\right)+K$$

$$= \frac{e^{2x}}{|i+2|^2}\,\text{Re}\left(e^{ix}\times(-i+2)\right)+k = \frac{e^{2x}}{5}\left(2\cos(x)+\sin(x)\right)+k.$$

Ou bien.

$$\int^x \cos(t)e^{2t}dt = \int^x (\sin(t))'e^{2t}dt \overset{\text{IPP}}{=} \sin(x)e^{2x} - \int^x \sin(t)2e^{2t}dt$$

$$= e^{2x}\sin(x) - 2\int^x (-\cos(t))'e^{2t}dt$$

$$= e^{2x}\sin(x) - 2\left(\left[-\cos(t)e^{2t}\right]^x - \int^x (-\cos(t))2e^{2t}dt\right)$$

$$= e^{2x}\left[\sin(x)+2\cos(x)\right] - 4\int^x \cos(t)e^{2t}dt.$$

D'où $5\int^x \cos(t)e^{2t}dt = e^{2x}\left[\sin(x)+2\cos(x)\right]+K_1$

et $\int^x \cos(t)e^{2t}dt = \frac{e^{2x}}{5}\left[\sin(x)+2\cos(x)\right]+K.$