

Calculus 7

43

Polynômes et fractions rationnelles en sinus et cosinus.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On cherche à déterminer les primitives

$$\int^x (\cos(t))^p (\sin(t))^q dt.$$

1^{er} cas : pour q est impair. On a :

$$\begin{aligned} p=2m+1: \int^x (\cos(t))^{2m+1} (\sin(t))^q dt &= \int^x (\cos^2(t))^m (\sin(t))^q (\cos(t))^1 dt \\ &= \int^x (1 - \sin^2(t))^m (\sin(t))^q (\cos(t)) dt = \int^x (1-u^2)^m u^q du \end{aligned}$$

par changement de variables $\sin(t)=u$. On est ramené à calculer les primitives d'un polynôme.

$$\begin{aligned} q=2m+1: \int^x (\cos(t))^p (\sin(t))^{2m+1} dt &= \int^x (\cos(t))^p (\sin^2(t))^m (-\cos(t)) dt \\ &= - \int^x (\cos(t))^p (1 - \cos^2(t))^m \cos(t) dt = - \int^u u^p (1-u^2)^m du \end{aligned}$$

par changement de variables (cosinus etc.)

On a $p=2n$ et $q=2m$.

2^e cas : p et q sont pairs.

On linéarise : pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\cos(t))^{2p} (\sin(t))^{2q} &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2p} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2q} \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \left(\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{itk} e^{-it(2p-k)} \right) \frac{(-1)^q}{2^{2q}} \left(\sum_{l=0}^{2q} \binom{2q}{l} e^{itl} e^{-it(2q-l)} (-1)^l \right) \\ &= \frac{(-1)^q}{2^{2(p+q)}} \left(\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{it(2p-k)} \right) \left(\sum_{l=0}^{2q} \binom{2q}{l} e^{-it(2q-l)} (-1)^l \right) \quad (*) \\ &= \frac{(-1)^q}{2^{2(p+q)}} \sum_{k=0}^{2p} \sum_{l=0}^{2q} \binom{2p}{k} \binom{2q}{l} (-1)^l e^{it(p-k-q+l)} \end{aligned}$$

$$\text{Dnc } \int^x (\cos(t))^{2p} (\sin(t))^{2q} dt = \frac{(-1)^q}{2^{2(p+q)}} \sum_{k=0}^{2p} \sum_{l=0}^{2q} \binom{2p}{k} \binom{2q}{l} (-1)^l \int^x e^{it(p-k-q+l)} dt$$

$$\text{et on utilise : } \int^x e^{itn} dt = \begin{cases} x + K & \text{si } n=0, \\ \frac{e^{inx}}{in} + K & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Alternativement, on peut réécrire (*) comme une combinaison linéaire de fonctions $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$ et on utilise

$$\int^x \cos(kt) dt = x + K \text{ si } k=0, \quad \int^x \sin(kt) dt = K \text{ si } k \neq 0, \\ = \frac{\sin(kt)}{k} + K \text{ si } k \neq 0,$$

Exemples: $\star$ Sur $I \subset \mathbb{R}$, on a

$$\int^x \cos^2(t) \sin^3(t) dt = \int^x \cos^2(t) (1 - \cos^2(t)) (-\cos'(t)) dt \\ \text{ch. de var.} \int^x u^2 (1-u^2) du = \int^x u^2 du - \int^x u^4 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]^{\cos(x)} - \left[\frac{u^5}{5} \right]^{\cos(x)} \\ = \frac{\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + K.$$

$$\star \text{ Sur } I \subset \mathbb{R}, \text{ on a} \\ \cos^2(t) \sin^2(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \times \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{24} \left(e^{2it} + 2e^{it}e^{-it} + e^{-2it} \right) \left(e^{2it} - 2e^{it}e^{-it} + e^{-2it} \right) \\ = -\frac{1}{24} \left(e^{2it} + 2e^{it}e^{-it} + e^{-2it} \right) \left(e^{2it} - 2e^{it}e^{-it} + e^{-2it} \right) = -\frac{1}{24} \left(e^{4it} - 4e^{it}e^{-it} + e^{-4it} \right) \\ = -\frac{1}{24} \left(e^{4it} - 4 + e^{-4it} \right) = -\frac{1}{24} \cos(4t) + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } \int^x \cos^2(t) \sin^2(t) dt = \frac{1}{24} \left[\int^x dt - \int^x \cos(4t) dt \right] \\ = \frac{1}{24} \left(x - \frac{\sin(4x)}{4} \right) + K.$$

Fractions rationnelles en sinus et cosinus.

Soit $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(m\mathbb{C})$ des fonctions polynômes.

à 2 variables. On souhaite déterminer:

$$\int^x \frac{P(\cos(t); \sin(t))}{Q(\cos(t); \sin(t))} dt$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

$t \mapsto Q(\cos(t), \sin(t))$ ne s'annule pas

La méthode principale consiste à faire un changement de variables approprié pour se ramener au calcul des primitives d'une fonction rationnelle.

Le choix du changement de variable est guidé par les

Règles de Bioche (voir Complément plus loin).

Exemples: $\int^x \frac{dt}{\cos(t) \sin^2(t)}$ sur $I =]0; \frac{\pi}{2}[$

Les règles de Bioche recommandent le changement de var.:

$$u = \sin(t). \quad \text{Pour } t \in I,$$

$$\int^a \frac{dt}{\cos(t) \sin^2(t)} = \int^x \frac{1}{\cos^2(t) \sin^2(t)} \cos(t) dt = \int^x \frac{1}{(1-\sin^2(t)) \sin^2(t)} \sin'(t) dt$$

Car $\cos$ n'est pas $\in \mathcal{C}^1$, or $\sin$ par chang. de var.:

$$\int^a \frac{dt}{\cos(t) \sin^2(t)} = \int^{\sin(x)} \frac{1}{(1-u^2)u^2} du.$$

On décompose en él. simples de fraction rationnelle $F(x) = \frac{1}{(1-x^2)x^2} = \frac{-1}{(x-1)(x+1)x^2}$

$$\text{Or } a \quad F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1} + 0 \text{ et}$$

$$b = (x^2 F(x))|_{x=0} = 1, \quad c = ((x-1)F(x))|_{x=1} = -\frac{1}{2}, \quad d = ((x+1)F(x))|_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

De plus, pour $|x| > 1$, on a

$$0 \leq \frac{1}{x^3(1-\frac{1}{x^2})}$$

$$= a + \frac{b}{x} + \frac{c}{1-\frac{1}{x}} + \frac{d}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a + c + d.$$

Donc $a = -c - d = 0$. Donc, sur I ,

$$\int^x \frac{dt}{\cos(t) \sin^2(t)} = 0 + \int^{\sin(x)} \frac{du}{u^2} + \int^{\sin(x)} \frac{\frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}}{u^2} + \frac{1}{2} \int^{\sin(x)} \frac{\frac{du}{u+1}}{u^2}$$

$$= \left[\frac{u^{-1}}{-1} \right] - \frac{1}{2} \left[\ln|u-1| \right] + \frac{1}{2} \left[\ln|u+1| \right]$$

$$= -\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{2} \ln(1-\sin(x)) + \frac{1}{2} \ln(1+\sin(x)) + K.$$

$$\int^x \frac{1}{\cos^4(t)} dt \quad \text{sur } I \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

(on pourrait aussi considérer le cas où $I \subset]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ ou plus généralement le cas où $I \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$)

[46]

Les règles de Briche invitent au chang. de var. : $u = \tan t$.

Rappel : $\tan' t = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$

sur I , on a
$$\int^x \frac{1}{\cos^4(t)} dt = \int^x \frac{1}{\cos^2(t)} \times \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \int^x (1 + \tan^2(t)) \times \tan'(t) dt.$$

Comme $\tan$ est C^1 sur I , on a, par chang. de var.,

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{\cos^4(t)} dt &= \int^{\tan(x)} (1 + u^2) du = \left[u \right]^{\tan(x)} + \left[\frac{u^3}{3} \right]^{\tan(x)} \\ &= \tan(x) + \frac{\tan^3(x)}{3} + K. \end{aligned}$$

$$\int^x \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt \quad \text{sur } I \subset]0, \pi[.$$

On remarque que, pour $t \in I$,
$$\frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} = \frac{1}{\sin(t)(1 + \frac{1}{\cos(t)})} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)(\cos(t) + 1)}.$$

Les règles de Briche recommandent le chang. de var. : $u = \cos(t)$.

sur I , on a
$$\int^x \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt = \int^x \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)(\cos(t) + 1)} \times (-\cos'(t)) dt = - \int^x \frac{\cos(t)}{(1 - \cos^2(t))(\cos(t) + 1)} \times \cos'(t) dt.$$

Comme $\cos$ est C^1 sur I , on a, par chang. de var.

$$\int^x \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt = - \int^{\cos(x)} \frac{u}{(1 - u^2)(u + 1)} du = - \int^{\cos(x)} \frac{u}{(u - 1)(u + 1)} du.$$

Comme $F(x) = \frac{X}{(X-1)(X+1)^2} = 0 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$, on a

$$0 = ((X-1)F(x))|_{X=-1} = \frac{1}{4}, \quad c = ((X+1)^2 F(x))|_{X=-1} = \frac{1}{2} \quad \text{et}$$

$$0 = F(0) = -a + b + c \quad \text{d'où } b = a - c = -\frac{1}{4}.$$

Donc, we I,

$$\int^u \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dt = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{4} \int \frac{du}{u+1} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u+1)^2} \quad \begin{matrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln|u-1| \right]^{\cos(x)} - \frac{1}{4} \left[\ln|u+1| \right]^{\cos(x)} - \left[\frac{(u+1)^{-1}}{2} \right]^{\cos(x)}$$

$$= \frac{1}{4} \ln(1 - \cos(x)) - \frac{1}{4} \ln(1 + \cos(x)) - \frac{1}{2(u+1)} + K.$$

147

Complément: Rgles de Biöche:

Soit $w(t) = \frac{P(\cos(t); \sin(t))}{Q(\cos(t); \sin(t))} dt$

le "forme différentielle" à intégrer.

L'objet "forme différentielle" n'est pas au programme (et ne sera abordé qu'en L3 ou M1).

On manipule formellement cet objet en appliquant les règles suivantes:

$$d(g(t)) = g'(t) dt \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} d(t) &= 1 \times dt \\ d(-t) &= (-1) \times dt \\ d(\pi - t) &= (-1) \times dt \\ d(\pi + t) &= 1 \times dt \end{aligned}$$

(f dérivable).

Exemples: pour $w(t) = \frac{\cos(t)+3}{\sin^2(t) + 2\cos(t)+7} dt$, on a

$$w(-t) = \frac{\cos(-t)+3}{\sin^2(-t) + 2\cos(-t)+7} \times (-1) \times dt, \quad w(\pi+t) = \frac{\cos(\pi+t)+3}{\sin^2(\pi+t) + 2\cos(\pi+t)+7} \times 1 \times dt.$$

$$w(\pi-t) = \frac{\cos(\pi-t)+3}{\sin^2(\pi-t) + 2\cos(\pi-t)+7} \times (-1) \times dt$$

Rgles: Si $w(t) = \omega(t)$, faire le changement de var. : $u = \cos(t)$
 Si $w(\pi-t) = \omega(t)$, $u = \sin(t)$
 Si $w(\pi+t) = \omega(t)$, $u = \tan(t)$
 Si $w(\pi-t) = \omega(t)$, $u = \cos(2t)$
 Si deux des cas précédents sont vrais, $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$
 Si aucun cas n'est vrai, $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

f(t) du changement de var.

Donc les 4 cas, la finit. $f(t)$ du changement de var.

Rg:

a les m. prop. q w :
 1^{er} cas: $\omega(-t) = \omega(t)$ et $\cos$ est paire
 2^{es} cas: $\cos(\pi-t) = \cos(t)$ et $\sin(\pi-t) = \sin(t)$
 3^{es} cas: $\cos(\pi+t) = \cos(t)$ et $\tan(\pi+t) = \tan(t)$
 4^{es} cas: $\cos(\pi-t) = \cos(2t)$ et $\tan(2t) = \tan(t)$