

Calcul 8.

48

Intégrales. (Feuille supplémentaire).

Ex. 12 (feuille suppl.).

1 - Les fonctions

$$[0; \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto \ln(\sin(t))$$

$$\text{et } [0; \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto \ln(\cos(t))$$

sont bien définies et continues par composition, puisque

$$\sin([0; \frac{\pi}{2}]) \subset \mathbb{R}^{++} \text{ et } \cos([0; \frac{\pi}{2}]) \subset \mathbb{R}^{++}.$$

$$\text{De plus, par } t \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin(t) \in]0; 1] \text{ donc } \ln(\sin(t)) \leq 0.$$

$$\text{Pour } x \in]0; \frac{\pi}{2}], \ln \sin \text{ est négative sur } [x; \frac{\pi}{2}] \text{ donc}$$

$$I(x) \leq 0, \text{ par le cours. De plus, comme la fonction}$$

$$[x; \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto \ln(\sin(t)) \text{ est continue et non nulle, } I(x) < 0$$

(y. cours).

$$2 - \text{soit } x \in]0; \frac{\pi}{2}]. \text{ Or } a, \text{ par } t \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin(t) = \sin(\frac{\pi}{2} - t) \text{ donc,}$$

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\sin(u)) du = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du = I(x)$$

$$\text{Or } \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t \text{ est } C^1. \text{ Donc, par change. de var,}$$

$$I(x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \varphi'(t) \ln(\sin(\varphi(t))) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} (-1) \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-t)) dt = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du = I(x)$$

$$I(x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \varphi'(t) \ln(\sin(\varphi(t))) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} (-1) \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-t)) dt = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du = I(x)$$

$$3 - \text{Soit } x \in]0; \frac{\pi}{2}]. \text{ Comme } \ln \sin \text{ est } C^1 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{2}], \text{ on a, par IPP,}$$

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = \int_x^{\frac{\pi}{2}} (t)' \ln(\sin(t)) dt = \left[t \ln(\sin(t)) \right]_x^{\frac{\pi}{2}} - \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \frac{1}{\sin(t)} \cos(t) dt$$

$$= 0 - x \ln(\sin(x)) - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cos(t)}{\sin(t)} dt. \quad (*)$$

$$\text{La fonction } g: [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue et, comme}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos(t)}{\sin(t)} = 1, \text{ donc } g \text{ se prolonge}$$

$$\text{par continuité en } 0. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt \in \mathbb{R}.$$

$$\text{De plus, } x \ln(\sin(x)) = x \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Donc, par (*), l'induite $I(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

45

4- Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. On a

$$\begin{aligned} \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\sin(t)) dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos(t)) dt &= \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} (\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))) dt \\ &= \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\sin(t)\cos(t)) dt = \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt \\ &= \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\left(\frac{\sin(4t)}{2}\right) \frac{\psi(t)}{2} dt = \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \psi(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\left(\frac{\sin(4t)}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \psi(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\left(\frac{\sin(4t)}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \psi(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\left(\frac{\sin(4t)}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Ch. de var.

$$= \frac{1}{2} \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \psi(t) dt$$

5- Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. On a

$$\begin{aligned} \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln\left(\frac{\sin(u)}{2}\right) du &= \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} (\ln(\sin(u)) - \ln(2)) du = \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln(\sin(u)) du - \ln(2) \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ &= \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln(\sin(u)) du - (\frac{\pi}{2} - 2x) \ln(2). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln(\sin(t)) dt &= \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln(\sin(t)) dt + \int_{\frac{\pi}{2}-2x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt \\ &= I(2x) + \int_{\frac{\pi}{2}-2x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt \quad \text{ou } \theta(t) = \pi - t \text{ et } c^1 \\ &= I(2x) - \int_{\frac{\pi}{2}-2x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta(t))) \theta'(t) dt = I(2x) - \int_{\frac{\pi}{2}-2x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = 2I(2x) \\ &\text{A. de var.} \\ &= I(2x) - \int_{\frac{\pi}{2}-2x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = I(2x) - \int_{\frac{\pi}{2}-2x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = 2I(2x) \end{aligned}$$

6- D'après 3 et 4, on a $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$, n.a. par (2),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln\left(\frac{\sin(u)}{2}\right) du = 2I - \pi \ln(2), (*)$$

Par $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a, par (1),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln\left(\frac{\sin(u)}{2}\right) du &= I(x) - \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln(\sin(t)) dt + I(x) - \int_0^x \ln(\cos(t)) dt = 2I(x) \\ &\text{sur } \left[\frac{\pi}{2}-x; \frac{\pi}{2}\right], \ln \sin \text{ est continue. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{2x}^{\frac{\pi}{2}-2x} \ln\left(\frac{\sin(u)}{2}\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = 0. \end{aligned}$$

De m, $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \ln(\cos(t)) dt = 0$.

Donc, par (*) et 2,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) dx = 2I.$$

Donc, par (*), $I = \frac{\pi}{2} \ln(2) = 2I.$

D'où $I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) = -\pi \ln(\sqrt{2}).$

Ex 13 (feuille suppl.)

1 - Comme $\theta \in]-\pi; \pi[\setminus \{0\}$, $e^{i\theta} \notin \mathbb{R}$ donc la fonction $\ln(z) \mapsto \frac{1}{e^{i\theta} - t}$ est bien définie et continue par quotient.

2 - Soit $\theta \in]-\pi; \pi[\setminus \{0\}$. On remarque que $-\theta \in]-\pi; \pi[\setminus \{0\}$.

Donc $I(-\theta)$ est bien définie et

$$\begin{aligned} I(-\theta) &= \int_0^1 \frac{dt}{e^{-i\theta} - t} = \int_0^1 \frac{dt}{(e^{i\theta} - t)} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta} - t}{|e^{i\theta} - t|^2} dt = \int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{|e^{i\theta} - t|^2} dt + i \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{|e^{i\theta} - t|^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{|e^{i\theta} - t|^2} dt + i \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{|e^{i\theta} - t|^2} dt. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int_0^1 \frac{dt}{e^{i\theta} - t} = \int_0^1 \frac{(e^{i\theta} - t)}{|e^{i\theta} - t|^2} dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta} - t}{|e^{i\theta} - t|^2} dt = \int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{|e^{i\theta} - t|^2} dt + i \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{|e^{i\theta} - t|^2} dt \\ &= I(-\theta). \end{aligned}$$

D'où $I(-\theta) = \overline{I(\theta)}.$

3 - D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{(\cos(\theta) - t)^2 + \sin^2 \theta} dt + i \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{(\cos(\theta) - t)^2 + \sin^2 \theta} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt - i \int_0^1 \frac{1/\sin(\theta)}{\left(\frac{\cos(\theta) - t}{\sin(\theta)}\right)^2 + 1} dt \end{aligned}$$

où $\varphi(t) = (\cos(\theta) - t)^2 + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 2t \cos \theta + t^2 + \sin^2 \theta = 1 - 2t \cos \theta + t^2.$

$$\begin{aligned} I(\theta) &= -\frac{1}{2} \left[\ln(\varphi(t)) \right]_0^1 + i \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2 + 1} dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln((\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2(\theta)) + i \left[\operatorname{Arctan}(\varphi(t)) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \ln((\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2(\theta)) + i \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta) - 1}{\sin(\theta)}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ex. 17 (feuille suppl.)

(51)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$

d'où
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right)^n dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(\varphi(t)) \right)^n \varphi'(t) dt$$

où $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$ est C^1 , par change de var.,

$$\text{on } \varphi'(t) = -1 \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^n du = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(u))^n du = I_n.$$

$$I_n = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \varphi(t)$$

Or a
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \left[\sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \left([t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4},$$

2. Par récurrence et $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) \in [0; 1]$ d'où $(\cos(t))^n \geq 0$ et, comme $0 \leq \cos(t) \leq 1$, on a $(\cos(t))^{n+1} = (\cos(t))^n \cos(t) \leq (\cos(t))^n$.

Par le cours,
$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt = I_n,$$

Donc $(I_n)_n$ est $\downarrow$. La suite $[0; \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto (\cos(t))^n$ est soit n.e.v. La suite $I_n \geq 0$ par le cours. De plus, continue et positive, $I_n \geq 0$ par le cours, et nulle, $I_n > 0$.

Comme cette suite est conti., et nulle, $I_n > 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} \times \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} \times \sin'(t) dt \\ &= \left[(\cos(t))^{n+1} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) (\cos(t))^n (-\sin(t)) \times \sin'(t) dt \\ &= 0 - 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (1 - \cos^2(t)) dt \\ &= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}. \end{aligned}$$

D'ici

152

$$(n+2)I_{n+2} = (n+2)I_n$$

4- Pour $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$, par 2 et 3,

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Par les op. sur les limites puisque $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

et

$$0 < \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Or $\lim \frac{I_{n+2}}{I_n} = 1$ d'ici, par le th. des gendarmes,

$\lim \frac{I_{n+1}}{I_n}$ existe et vaut 1.

$$S. \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ soit } I(n) = (I_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2})$$

$$\text{et } Q(n) = (I_{n+1} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}).$$

$$\text{Comme } \frac{\pi \times (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{\pi}{2} = I_0 \text{ et } \frac{2^{2n}(0!)^2}{(2n+1)!} = 1 = I_1$$

$I(0)$ et $Q(0)$ sont strictes.

Supp. $I(n)$ stricte par un $n \in \mathbb{N}$. Par 3, on a

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} = I_{n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \stackrel{\text{H.R.}}{\leq} \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\pi \times (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \\ &= \frac{\pi (2n+2)(2n+1) \times (2n)!}{(2n+2)^2 2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{\pi (2n+1)!}{2^{2n+3}((n+1) \times n!)^2} \\ &= \frac{\pi (2(n+1))!}{2^{2(n+1)+1}((n+1)!)^2} \end{aligned}$$

D'ici $I(n+1)$ est stricte.

Supp. $Q(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$. On a, par 3, [53]

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = \frac{2n+2+1}{2n+2+2} I_{2n+1} \stackrel{H.R.}{=} \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)^2 \times 2^{2n}(n!)^2}{(2n+2) \times (2n+1)!} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!} \end{aligned}$$

Par le th. de réc. $I(n)$ est $\downarrow$ et minorée.

Donc $Q(n+1)$ est vraie. On a donc vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6- Par 2, on sait que (I_n) est $\downarrow$ et minorée par 0. Par le cours, elle converge vers un $l \in \mathbb{R}$. De plus, en passant à la limite $n \rightarrow \infty$ dans la inég. $I_n \geq 0$, on obtient $l \geq 0$.

Par le cours, les s. suites $(I_{2n})_n$ et $(I_{2n+1})_n$ convergent aussi vers l . Par 5, $n \rightarrow \infty$, pour tout n ,

$$(x) \quad I_{2n+1} I_{2n} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{\pi \cdot (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

or, par les opé. sur les limites, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} I_{2n+1} = l^2$.

D'où $l = 0$ et $(I_n)_n$ cv. vers 0.

7- On admet le résultat suivant (cours 2):
On admet le résultat suivant: si $l \in \mathbb{R}$ et $(I_n)_n$ est une suite telle que $I_n \rightarrow l$, alors $(I_n)_n$ est une suite telle que $I_n \rightarrow l$.

On a: $(\lim_{n \rightarrow \infty} I_n \text{ existe et vaut } l) \Leftrightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} \text{ existe et vaut } l)$

On va appliquer ce résultat à la suite $u = (n I_n I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Par (*), on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} = 2n \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\pi}{2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par 5,

$$u_{2n+1} = (2n+1) \frac{I_{2n+2}}{I_{2n+1}} = (2n+1) \frac{I_{2n+1}}{I_{2n+1}} = (2n+1) \times \frac{\pi (2n+1)!}{2^{(2n+1)!}} \times \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

$$= \frac{\pi \cdot 2(n+1) \times (2n+1)}{2 \times 2^{2(n+1)}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(n+\frac{1}{2}) \times (2+\frac{1}{2n})}{(n+\frac{1}{2})^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\lim u_n = \lim u_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$. Par le résultat admis,

$\lim u_n = \frac{\pi}{2}$ soit $\lim n I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\pi/2}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(I_n \sqrt{n})^2 \geq n I_n^2 = n I_n I_{n+1} \times \frac{I_n}{I_{n+1}}$$

comme le fait,

Donc $(I_n \sqrt{n})^2 \geq n I_n^2$ c.v. vers $\frac{\pi}{2}$. Comme le fait,

$\sqrt{\cdot}$ est concave en $\frac{\pi}{2}$,

vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ par composition.

8- À voir en L2.