Calculus 9.

Sommes de Riemann et applications.

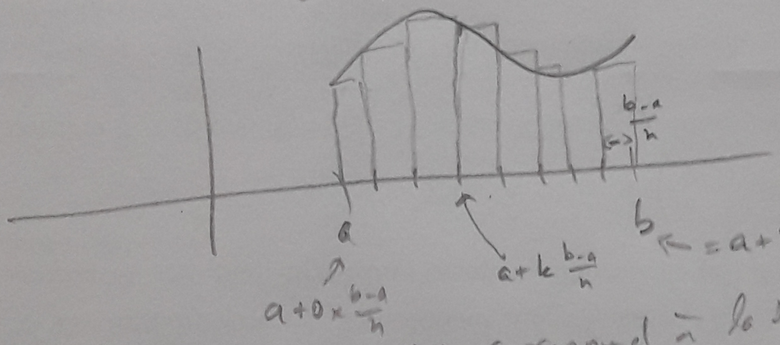
Soit $a<b$ dans $\mathbb{R}$ et $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)}{n}\times f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

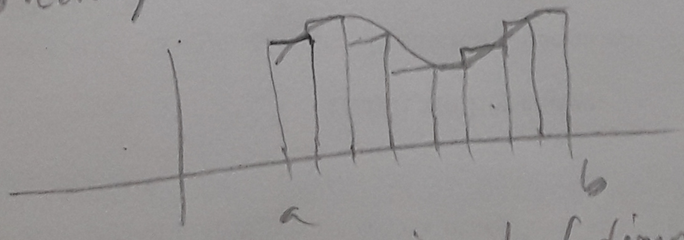
et $$v_n(f)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)}{n}\times f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right).$$

Les suites $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont appelées des sommes de Riemann de f.

Rq :



Pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n(f)$ correspond à la somme des aires des rectangles du dessin précédent. Pour $v_n(f)$ c'est celle des aires des rectangles du dessin suivant :



On admet le résultat suivant (démontré dans l'exercice 26 de la feuille suppl.) :

$$\lim u_n(f)=\lim v_n(f)=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Exemple : Soit $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto 1-t$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$u_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-0)}{n} \times f\left(0 + k \times \frac{(1-0)}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$
et $v_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-0)}{n} f\left(0 + k\frac{(1-0)}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Ici, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$u_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \left(n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right)$
$= 1 - \frac{1}{n^2} \times \frac{(n-1)n}{2} = 1 - \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

D'autre part,
$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Ex. 27. (feuille suppl.). L'idée ici est de voir que les suites étudiées sont des sommes de Riemann d'une certaine fonction ou "proches" de telles sommes. Pour ce faire, on cherche à faire apparaître dans la somme un $\frac{k}{n}$ d'une fonct. de $\frac{k}{n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$; $\frac{1}{n} = \frac{b-a}{n}$; $\frac{k}{n}$; $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2$. Elle est continue.
$(u_n)_n$ est une somme de Riemann de f donc $\lim u_n$ existe et vaut
$\int_0^1 f(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Soit $g : [0;\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin(t)$. Elle est continue.
(v_n) est une somme de Riemann de g. Donc
$\lim v_n = \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = \left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = 2$.

Rq. : Soit $\tilde{g} : [0;1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin(\pi t)$. (suite)

On remarque que $\frac{1}{\pi}(v_n)_n$ est une somme de Riemann de $\tilde{g}$ donc $\lim \frac{1}{\pi} v_n = \int_0^1 \sin(\pi t)\,dt = \left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

Comme $v_n = \pi \times \frac{1}{\pi} v_n$, par produit, on retrouve $\lim v_n = 2$.

$(w_n)_n$ est aussi une somme de Riemann de g.

Donc $\lim w_n = \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = 2$.

C'est aussi le cas de $(x_n)_n$ car, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{0.k}{n}\right) + v_n = v_n$.

Étudions $(\hat{x}_n)_n$ donnée par $\hat{x}_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Ce n'est pas une somme de Riemann de $\hat{g} : [0;\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \cos(t)$

mais, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\hat{x}_n = \frac{\pi}{n} \times \cos\left(0.\frac{\pi}{n}\right) + \hat{y}_n$$

où $(\hat{y}_n)$ est une somme de Riemann de $\hat{g}$,

Donc $\lim \hat{y}_n = \int_0^{\pi} \cos(t)\,dt = [\sin(t)]_0^{\pi} = 0$.

Comme $\hat{x}_n = \frac{\pi}{n} + \hat{y}_n$, $\lim \hat{x}_n = 0$,

$= \frac{v_n}{\pi}$!

Par $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$y_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$, on a, par composition, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n} = 1$. Comme $\lim \frac{v_n}{\pi} = \frac{2}{\pi}$, $\lim y_n = \frac{2}{\pi}$ par produit.

Ex. 15 - (feuille suppl.)

1. Pour $(x;\theta)\in\mathbb{R}^2$, on a $|x-e^{i\theta}|=|x-e^{-i\theta}|$ (puisque $|\bar{z}|=|z|$ pour $z\in\mathbb{C}$). De plus,

$$|x-e^{i\theta}|^2 = |x-\cos(\theta)-i\sin(\theta)|^2 = (x-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)$$
$$= x^2-2x\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)$$
$$= x^2-2x\cos(\theta)+1.$$

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, les racines du poly. $X^{2n}-1$ sont les racines $2n$ èmes de 1 : $e^{i\left(\frac{\theta}{n}\pi+\frac{2k\pi}{2n}\right)}$, $k\in[-n;n-1]\cap\mathbb{Z}$.

Donc
$$X^{2n}-1 = 1\times\prod_{k=-n}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)$$
$$= (X-e^{-i\pi})\prod_{k=-(n-1)}^{-1}\left(X-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$$
$$= (X+1)(X-1)\prod_{\ell=1}^{n-1}\left(X-e^{-\frac{i\ell\pi}{n}}\right)\prod_{\ell=1}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{\ell\pi}{n}}\right)$$
$$= (X^2-1)\prod_{\ell=1}^{n-1}\left(X^2-\left(e^{i\frac{\ell\pi}{n}}+e^{-i\frac{\ell\pi}{n}}\right)X+1\right)$$
$$= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$

Pour $x\in\mathbb{R}^2$, on a donc la formule demandée.

3. Pour $(x;\theta)\in\mathbb{R}^2$, on a, par 1,

$x^2-2x\cos\theta+1 = |x-e^{i\theta}|^2 \geq 0$. De plus, c'est nul ssi $x=e^{i\theta}$ ssi ($x=-1$ et $\theta\in\pi+2\pi\mathbb{Z}$ ou $x=1$ et $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$).

Comme on suppose $|x|\neq 1$, c'est >0. Donc $f_x : [0;\pi]\ni\theta\mapsto \ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)$ est bien définie et cont. par composition.

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. On considère la somme de Riemann de f_x suivante :

$$U_n(f_x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} f_x\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right).$$

Donc, comme f_x est cont., $\lim_{n\to\infty} U_n(f_x) = \int_0^\pi f_x(t)\,dt = I(x)$.

Par ailleurs, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après 2,

$$0 < \frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

donc

$$\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

$$= \frac{n}{\pi} U_n(f_x) - \ln\left(x^2 - 2x\cos(0) + 1\right)$$

d'où $\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) + \ln\left((x-1)^2\right) = \frac{n}{\pi} U_n(f_x)$

et $\frac{n}{\pi} U_n(f_x) = \ln\left(\frac{x^{2n}-1}{(x-1)(x+1)} \times (x-1)^2\right) = \ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x+1}(x-1)\right)$.

1er cas : $|x| < 1$. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n(f_x) = \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x+1}(x-1)\right)$$

$\frac{\pi}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$; $\frac{x^{2n}-1}{x+1}(x-1) \to \frac{1-x}{x+1}$ quand $n \to \infty$; $\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x+1}(x-1)\right) \to$?

Donc $I(x) = 0$.

2ème cas : $|x| > 1$. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n(f_x) = \frac{\pi}{n} \times \ln\left(x^{2n} \times \frac{1 - \frac{1}{x^{2n}}}{x+1} \times (x-1)\right) = \frac{\pi}{n} \ln\left(x^{2n}\right) + \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{1 - \frac{1}{x^{2n}}}{x+1} \times (x-1)\right)$$

$$= \pi \ln\left(x^2\right) + \frac{\pi}{n} \times \ln\left(\frac{x-1}{x+1} \times \left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right)\right)$$

$\frac{\pi}{n} \to 0$; $\frac{x-1}{x+1} \times \left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right) \to \frac{x-1}{x+1}$ quand $n \to \infty$; $\ln\left(\frac{x-1}{x+1} \times \left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right)\right) \to \ln\left(x^2\right)$.

D'où $I(x) = \pi \ln\left(x^2\right) = \pi \ln\left(|x|^2\right) = 2\pi \ln|x|$.

Ex 16 (feuille suppl.)

1- Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$. On remarque que $\frac{1}{x}$ est bien déf. et $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. Donc $I\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien déf. et

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos(\theta) + 1\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \ln\left(\frac{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}{x^2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left(\ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1) - \ln(x^2)\right) d\theta$$

$$= I(x) - \ln(x^2)\int_0^\pi d\theta = I(x) - \pi\ln(x^2).$$

2- Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. On a bien $-x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. De plus, d'après l'ex. 15,

$$I(-x) = \int_0^\pi \ln\left(|-x - e^{i\theta}|^2\right) d\theta = \int_0^\pi \ln\left(|x + e^{i\theta}|^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \ln\left(|x - e^{i(\theta-\pi)}|^2\right) d\theta = \int_0^\pi \ln\left(\left|\overline{(x - e^{i(\theta-\pi)})}\right|^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \ln\left(|x - e^{-i(\theta-\pi)}|^2\right) d\theta = -\int_0^\pi \ln\left(|x - e^{i\varphi(\theta)}|^2\right)\varphi'(\theta)\,d\theta$$

où $\varphi(\theta) = \pi - \theta$ est C^1. D'où, par ch. de var.,

$$I(-x) = -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} \ln\left(|x - e^{iu}|^2\right) du = -\int_\pi^0 \ln\left(|x - e^{i\theta}|^2\right) d\theta = I(x).$$

3- Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. On a $x^2 \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et

$$I(x^2) = \int_0^\pi \ln\left(|x^2 - e^{i\theta}|^2\right) d\theta = \int_0^\pi \ln\left(\left|(x - e^{i\frac{\theta}{2}})(x + e^{i\frac{\theta}{2}})\right|^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \ln\left(|x - e^{i\frac{\theta}{2}}|^2 \times |x + e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta = \int_0^\pi \ln\left(|x - e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta + \int_0^\pi \ln\left(|x + e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta.$$

(*)

On peut écrire :

$$\int_0^\pi \ln\left(|x - e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta = 2\int_0^\pi \ln\left(|x - e^{i\varphi(\theta)}|^2\right)\varphi'(\theta)\,d\theta$$

où $\psi(\theta) = \frac{\theta}{2}$ est C^1. Donc, par ch. de var.,

$$\int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta = 2\int_{\psi(0)}^{\psi(\pi)} \ln\left(|x - e^{iu}|^2\right) du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(|x - e^{iu}|^2\right) du, \quad (**)$$

D'autre part,

$$\int_0^{\pi} \ln\left(|x + e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta = \int_0^{\pi} \ln\left(|x + e^{-i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta = \int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i(\pi - \frac{\theta}{2})}|^2\right) d\theta$$

$$= -2\int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i\gamma(\theta)}|^2\right) \gamma'(\theta)\, d\theta$$

où $\gamma(\theta) = \pi - \frac{\theta}{2}$ est C^1. Par chang. de var.,

$$\int_0^{\pi} \ln\left(|x + e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta = -2\int_{\gamma(0)}^{\gamma(\pi)} \ln\left(|x - e^{iu}|^2\right) du = -2\int_{\pi}^{\pi/2} \ln\left(|x - e^{iu}|^2\right) du$$

$$= 2\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\left(|x - e^{iu}|^2\right) du. \quad (***)$$

Par (*), (**) et (***), on obtient

$$I(x^2) = 2\int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{iu}|^2\right) du = 2I(x),$$

4 - Modification de l'énoncé : --- pour $x \in]0;\frac{1}{4}[$, $|I(x) - I(0)| \leq c|x|$.

Par la formule de Taylor, on a, pour $u \in]-1;+\infty[$,

l'existence d'un $\sigma \in]0;1[$ tel que

$$\ln(1+u) = u(1+u\sigma)^{-1}.$$

On a donc $|\ln(1+u)| \leq |u|$ si $u \geq 0$ et, si $u \in]-1;0[$,

$u \leq \sigma u < 0$ donc $1+u \leq 1+\sigma u$ donc $\frac{1}{1+\sigma u} \leq \frac{1}{1+u}$ donc

$$|\ln(1+u)| \leq \frac{|u|}{1+u} = \frac{|u|}{|1+u|}. \text{ Donc, pour } u > -1,$$

$$|\ln(1+u)| \leq |u| \times \max\left(\frac{1}{|1+u|}; 1\right).$$

Soit $x \in]0;\frac{1}{4}[$. Pour $\theta \in [0;\pi]$, on a

$$|\ln(1 + x^2 - 2x\cos(\theta))| \leq |x^2 - 2x\cos(\theta)| \times \max\left(\frac{1}{|x - e^{i\theta}|^2}; 1\right) \leq |x|(|x|+2)\max\left(1; \frac{1}{|x-e^{i\theta}|^2}\right).$$

Or $|x - e^{i\theta}|^2 \geq 1 - |x|(|x|+2) \geq 1 - \frac{1}{4}\times 3 \geq \frac{1}{4}$ donc $\frac{1}{|x-e^{i\theta}|^2} \leq 4$.

Poser

On a donc, pour $x \in]0;\frac{1}{4}[$ et $\theta \in [0;\pi]$,

$|\ln(1+x^2-2x\cos(\theta))| \leq |x| \times \underbrace{3\times 4}_{=c}$.

5- Par 4, on a, pour $x \in]0;\frac{1}{4}[$, $|I(x)-I(0)| \leq c|x|$.
Cette inégalité est encore vraie pour $x \in]-\frac{1}{4};0[$ car I est paire et $I(0)=0$. Donc, pour $x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$, $|I(x)-I(0)| \leq c|x|$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} |x| = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} I(x) = I(0)$ par le Th. des gendarmes, I est donc continue en 0.

6- Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(|x^{(2^n)}| \neq 1 \text{ et } I(x^{(2^n)}) = 2^n I(x)\right)$.
$\mathcal{P}(0)$ est vraie et, par 3, $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geq 1$. Comme $x^{(2^{n+1})} = x^{(2\times 2^n)} = (x^{(2^n)})^2$ et $|x^{(2^n)}| \neq 1$ par hyp. de réc., $|x^{(2^{n+1})}| \neq 1$. De plus, par 3,

$$I(x^{(2^{n+1})}) = I((x^{(2^n)})^2) = 2\,I(x^{(2^n)}) \overset{H.R.}{=} 2\times 2^n I(x) = 2^{n+1} I(x).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le Th. de réc., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Soit $x \in]0;1[$. La suite géométrique $(x^p)_p$ tend vers 0. Sa sous-suite $(x^{(2^n)})_n$ tend donc aussi vers 0. Comme I est cont. en 0 (cf. 5), $\lim\limits_{n\to\infty} I(x^{(2^n)}) = I(0) = 0$.
Or, pour tout n,

$$I(x) = \frac{1}{2^n} \times I(x^{(2^n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc $I(x) = 0$. Par 2, on en déduit que $I = 0$ sur $]-1;1[$.
Par 1, on a, pour $x > 1$, $I(x) = I(\frac{1}{x}) + \pi\ln(x^2) = \pi\ln(x^2)$ car $\frac{1}{x} \in]0;1[$. Par 2 de nouveau, $I(x) = \pi\ln(x^2)$ pour $|x|>1$.
On retrouve le résultat obtenu dans l'ex. 15.

Ex. 18 (feuille suppl.)

Soit $p \in \mathbb{Z}^*$. On a

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ipt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{e^{-ipt}}{-ip}\right)' dt.$$

Comme f est C^1, on a, par IPP,

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)\frac{e^{-ipt}}{-ip}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-ipt}}{-ip}dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{f(0)-f(2\pi)}{ip} + \frac{1}{ip}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ipt}dt \right)$$

$$= \frac{-i}{2\pi p}\left(f(0)-f(2\pi) + \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ipt}dt \right).$$

Comme f est C^1, f' est cont. donc bornée sur le segment $[0;2\pi]$.

Soit $M \geq \sup_{t\in[0,2\pi]} |f'(t)| \geq 0$. On a donc, pour $p \in \mathbb{Z}^*$,

$$|c_p(f)| \leq \frac{1}{2\pi|p|}\left(|f(0)| + |f(2\pi)| + M\int_0^{2\pi} dt \right) = \frac{C}{|p|}$$

pour une constante $C \geq 0$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|c_{-n}(f)| \leq \frac{C}{n} \quad \text{et} \quad |c_n(f)| \leq \frac{C}{n}.$$

Comme $\lim \frac{C}{n} = 0$, on a, par le Th. des gendarmes,

$\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} c_{-n}(f) = 0$,

Ex. 19. (feuille suppl.)

Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$, on a

$$\int_0^1 (2+t)^{-n}dt = \left[\frac{(2+t)^{1-n}}{1-n}\right]_0^1 = \frac{3^{1-n}-2^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{n}\times \frac{3\cdot 3^{-n} - 2\cdot 2^{-n}}{1-\frac{1}{n}} \to 1 \neq 0$$

Par les opé. sur les limites $\lim \int_0^1 (2+t)^{-n}dt = 0$.

On peut retrouver ce résultat de la façon suivante :

Pour $t \in [0;1]$, on a $2+t \geq 2$ donc $\frac{1}{2} \geq (2+t)^{-1}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$\frac{1}{2^n} \geq (2+t)^{-n} > 0$. Donc, par le cours, $\int_0^1 \frac{1}{2^n}dt \geq \int_0^1 (2+t)^{-n}dt \geq 0$

$\|$
2^{-n}

et comme $\lim 2^{-n} = 0$, $\lim \int_0^1 (2+t)^{-n}dt = 0$ par le Th. des gendarmes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il est difficile de calculer

$$\int_0^1 (2+t^2)^{-n} dt.$$

On sait le faire par récurrence mais c'est fastidieux.
Cependant, on peut remarquer que, pour $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$,
$2+t^2 \geq 2$ donc $\frac{1}{2} \geq (2+t^2)^{-1}$ et $\frac{1}{2^n} \geq (2+t^2)^{-n} > 0$ donc, par le cours,

$$\int_0^1 \frac{dt}{2^n} \geq \int_0^1 (2+t^2)^{-n} dt \geq 0 \text{ et, par le Th. des gendarmes}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (2+t^2)^{-n} dt = 0.$$

Dans les deux cas précédents, on avait à chaque fois

$$\lim_{n\to\infty} (2+t)^{-n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} (2+t^2)^{-n} = 0.$$

Ceci n'est plus vrai pour $(\cos(t))^n$ car $(\cos(0))^n = 1$, pour tout n.
Cependant, en faisant un dessin, on s'attend à ce que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} (\cos(t))^n dt = 0.$$

(Au passage, on a démontré cela dans l'ex. 17, feuille suppl.),

Or montrer : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; \left(n \geq N \Rightarrow \left|\underbrace{\int_0^{\pi/2} (\cos(t))^n dt}_{I_n}\right| < \varepsilon\right)$.

On remarque, pour tout n et $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $(\cos(t))^n \geq 0$ donc $I_n \geq 0$ et

pour $\eta \geq 0$, $0 \leq \int_0^\eta (\cos(t))^n dt \leq \int_0^\eta 1 dt = \eta$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tq. $\eta < \varepsilon/2$ et $\eta < \pi/2$.

$$0 \leq I_n = \int_0^\eta (\cos(t))^n dt + \int_\eta^{\pi/2} (\cos(t))^n dt \leq \eta + \int_\eta^{\pi/2} (\cos(\eta))^n dt = \eta + (\tfrac{\pi}{2} - \eta)(\cos(\eta))^n \leq \eta + \tfrac{\pi}{2}(\cos(\eta))^n.$$

Car $\cos \downarrow$ sur $[0; \pi/2]$.

Comme $0 < \cos(\eta) < 1$, $\lim_{n\to\infty} (\cos(\eta))^n = 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$n \geq N \Rightarrow |(\cos(\eta))^n| < \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a

$$0 \leq I_n \leq \varepsilon/2 + \frac{\pi}{2} \times \frac{\varepsilon}{\pi} = \varepsilon,$$

Soit $|I_n| < \varepsilon$. On a montré que $\lim I_n = 0$.