Contrôle continu 2. Théorie de la mesure

Exercice 1. Soit X un ensemble.

1. Donner la définition d'une tribu $\mathcal{T}$ sur X.
2. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur X. Donner la définition d'une mesure μ sur $\mathcal{T}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{N} := \{I \subset \mathbb{N} \,|\, |I| < \infty\}$ (ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$). On note

$$A := \left\{ \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n \middle| N \in \mathbb{N} \right\}, \quad B := \left\{ \sum_{n \in I} \left(\frac{1}{2}\right)^n \middle| I \in \mathcal{N} \right\}.$$

1. Calculer $\sum_{n \in I} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $I = \{1\}$, $I = \{1; 3\}$ et $I = \{1; 2; 3\}$. Ranger dans l'ordre croissant ces trois sommes.
2. Montrer que $\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n \in I} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour un certain $I \in \mathcal{N}$ que l'on précisera. En déduire que $A \subset B$. Comparer $\sup A$ et $\sup B$.
3. Soit $I \in \mathcal{N}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $I \subset \{0, \ldots, N\}$. En déduire que $\sum_{n \in I} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis que $\sup A = \sup B$.

Exercice 3. Soit Ω un ensemble et soit A une partie non vide et stricte de Ω.

1. Déterminer, sans justifier, $\mathcal{T}(\{A\})$ la tribu engendrée par $\{A\}$.
2. Déterminer deux mesures μ et ν sur $\mathcal{T}(\{A\})$ distinctes telles que $\mu(A) = \nu(A)$.

Exercice 4. On munit les ensembles X suivants de la tribu $\mathcal{P}(X)$ et de la mesure de comptage notée μ_{comp}.

1. Soit $X = \mathbb{R}$. Calculer $\mu_{\text{comp}}(\{-8; \sqrt{3}\})$, $\mu_{\text{comp}}([4; 7])$, $\mu_{\text{comp}}(\mathbb{Z})$. Soit U un ouvert non vide. Calculer $\mu_{\text{comp}}(U)$.
2. Soit $X = \mathbb{R}^2$. Calculer $\mu_{\text{comp}}([0; 1]^2)$ et $\mu_{\text{comp}}([0; 1]^2 \cap \mathbb{Z}^2)$.

Exercice 5. Dans tout l'exercice, λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soient $C_0 := [0; 1]$ et $C_n \subset \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) défini par

$$C_n := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists a_1, \ldots, a_n \in \{0; 2\}, \exists \varepsilon \in [0; 1], x = \frac{1}{3} a_1 + \cdots + \frac{1}{3^n} a_n + \frac{\varepsilon}{3^n} \right\}.$$

On définit aussi $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

1. Montrer que C_1 (respectivement C_2) peut s'écrire comme réunion disjointe de deux (respectivement quatre) intervalles que l'on précisera.
2. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$ et que $C_{n+1} = \frac{1}{3} C_n \sqcup \frac{1}{3}(2 + C_n)$ ($*$). Montrer que C_n et C appartiennent à la tribu de Borel et déterminer $\lambda(C_n)$ et $\lambda(C)$.
3. Montrer que
$$\varphi \colon \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \longmapsto \varphi(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{3^n}$$
réalise une bijection de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ sur C. C est-il dénombrable? C est-il en bijection avec $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

($*$) Pour X_1, X_2, X_3 parties d'un ensemble X, la notation $X_3 = X_1 \sqcup X_2$ signifie $X_3 = X_1 \cup X_2$ **et** $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.