CY Cergy Paris Université
Département de Mathématiques
L3 Maths - S5
2025/2026

$\boxed{\text{S : fait en salle}}$

$\boxed{\text{L : à lire.}}$

$\boxed{\text{TD : voir en td.}}$

Analyse Complexe

Cours basé sur le cours d'analyse complexe de Laurent Bruneau (2022/2023).

CONTENTS

CHAPTER 1

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

L

Ce cours a pour objet principal les fonctions complexes d'une variable complexe, c'est-à-dire les fonctions "de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$". Plus précisément, on considèrera des fonctions définies sur un sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, i.e. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Tout comme pour les fonctions d'une variable réelle, on s'intéressera aux notions de fonction continue mais surtout "$\mathbb{C}$-dérivable", ainsi qu'à leurs propriétés. On reviendra également sur la notion de séries entières (d'une variable complexe) qui joueront un rôle important. On s'intéressera enfin aux notions de primitive et d'intégrale d'une fonction le long d'un chemin inclus dans son ensemble de définition.

1.1 Topologie et convergence dans $\mathbb{C}$.

L

Que ce soit pour parler de continuité, de $\mathbb{C}$-dérivabilité ou de convergence de série, la notion de limite est présente. La "nature" de l'ensemble de définition peut être importante. C'est déjà le cas pour les fonctions réelles d'une variable réelle. Par exemple, les théorèmes des valeurs intermédiaires et des accroissements finis ne sont vrais que si l'ensemble de définition est un *intervalle*. Pour étudier les extrema d'une telle fonction, si elle est continue sur un segment (plus généralement un *compact*) alors elle admet un minimum et un maximum. Inversement si elle est dérivable alors en un extremum sa dérivée s'annule à condition que l'ensemble de définition soit un *ouvert*. Dans cette section on commence par rapidement présenter quelques prérequis indispensables pour la suite. C'est l'adaptation à $\mathbb{C}$ de ce qui a été vu en L2 sur la topologie dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

S

1.1.1 Rappels sur $\mathbb{C}$, module.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est défini comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que l'on munit d'une multiplication interne : pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x'; y') \in \mathbb{R}^2$, le produit de $(x; y)$ par $(x'; y')$ est défini par

$$(x; y) \cdot (x'; y') \;=\; (xx' - yy'; xy' + x'y)\,.$$

S

Ce produit est associatif, commutatif, distributif sur l'addition. Le vecteur $(1;0)$ est l'élément neutre de cette multiplication. Tout complexe non nul a un inverse. On dit que l'ensemble $\mathbb{C}$ est un corps. On note par 1 le vecteur $(1;0)$ et par i le vecteur $(0;1)$. L'espace $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et la base $(1;i)$ de $\mathbb{C}$ est appelée base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On remarque que $1^2 := 1\cdot 1 = 1$ et $i^2 := i\cdot i = -1$, où $-1 = (-1;0)$.
Comme $\mathbb{C}$ est un corps, on peut aussi voir $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, dont le vecteur 1 est une base. En fait, tout complexe non nul en est une base.
Pour $z = (x;y) \in \mathbb{C}$, on dit que x est la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et que y est la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$. On construit ainsi deux applications Re et Im de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à $z \in \mathbb{C}$, associent sa partie réelle et sa partie imaginaire, respectivement. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z \;=\; (\mathrm{Re}(z);\mathrm{Im}(z)) \;=\; \mathrm{Re}(z)\,(1\,;\,0) \,+\, \mathrm{Im}(z)\,(0\,;\,1) \;=\; \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)\,.$$

Une application $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{R}$-*linéaire* si elle est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans lui-même. On dit qu'elle est $\mathbb{C}$-*linéaire* si elle est une application linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans lui-même. On va voir qu'une application $\mathbb{C}$-linéaire est automatiquement $\mathbb{R}$-linéaire. En revanche, une application $\mathbb{R}$-linéaire peut ne pas être $\mathbb{C}$-linéaire.

Proposition 1.1. *Soit $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

1. *Si L est $\mathbb{C}$-linéaire, elle est aussi $\mathbb{R}$-linéaire.*

2. *L'application L est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement s'il existe un $w \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $L(z) = w\,z$. Lorsque l'une des propositions de l'équivalence est vraie, il y a unicité du w vérifiant la proposition de droite.*

3. *On suppose que L est $\mathbb{R}$-linéaire. L'application L est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si sa matrice dans la base canonique $(1;i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est du type*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. Lorsque L est $\mathbb{C}$-linéaire, le w du 2 est $L(1) = a + ib$.

Démonstration. Voir TD. □

L'application $\mathrm{Id} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\mathrm{Id}(z) = z$ est $\mathbb{C}$-linéaire (c'est la multiplication par 1).
La fonction partie réelle Re (resp. imaginaire Im) est $\mathbb{R}$-linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.
La conjugaison complexe $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\bar{\cdot}(z) = \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$, le conjugué de z, est $\mathbb{R}$-linéaire mais n'est pas non plus $\mathbb{C}$-linéaire.
On a vu en L2 que l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \ni (x;y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est une norme (la norme euclidienne). Cette norme "dérive" du produit scalaire $\langle\cdot;\cdot\rangle : (\mathbb{R}^2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$\langle\cdot;\,\cdot\rangle\big((x;y);(x';y')\big) \;:=\; \big\langle(x;y);\,(x';y')\big\rangle \;:=\; xx' + yy'$$

puisque, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x;y)\| = \sqrt{\langle(x;y);(x;y)\rangle}$.
Puisque $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, cette norme est une norme sur $\mathbb{C}$ que l'on note $|\cdot|$

et que l'on appelle “module”. Avec la même notation, le produit scalaire précédent agit sur $\mathbb{C}^2$. On remarque que, pour tout $(w;z) \in \mathbb{C}^2$,

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \quad |wz| = |w|\,|z|, \quad \langle w;\, z\rangle = \mathrm{Re}\big(w \cdot \overline{z}\big) = \mathrm{Re}\big(\overline{w} \cdot z\big) = \langle z;\, w\rangle . \tag{1.1}$$

S

Comme le module est une norme sur $\mathbb{C}$, il vérifie l'inégalité triangulaire suivante :

$$\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z+z'| \leq |z| + |z'| . \tag{1.2}$$

On vérifie (cf. TD) que cette propriété est équivalente à

$$\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2, \quad \big||z| - |z'|\big| \leq |z-z'| . \tag{1.3}$$

D'après la seconde propriété dans (1.1), le module est aussi une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, nous utiliserons la topologie (et donc la notion de convergence) des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés vue en L2.

1.1.2 Disques, ouverts et fermés.

Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension 2, les boules sont appelées des disques. On rappelle ici des notions et des propriétés de base vues en L2.

S

Notation. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$. On note $D(z_0;r[= \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-z_0| < r\}$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r. On note également $D(z_0;r] = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-z_0| \leq r\}$, resp. $C(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-z_0| = r\}$, le disque fermé, resp. le cercle, de centre z_0 et de rayon r.

Lorsque $r = 0$, $D(z_0;r[$ est vide et $D(z_0;r] = C(z_0;r) = \{z_0\}$. On utilisera surtout ces objets quand $r > 0$.

Définition 1.1. *Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $z \in \Omega$, $|z| \leq M$ i.e. tel que $\Omega \subset D(0;M]$.*

Exercice 1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer les équivalences :*

$$\begin{aligned}\big(\Omega \text{ est borné}\big) &\iff \big(\exists (z_0;r_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{+*}\,;\ \Omega \subset D(z_0;r_0[\big) \\ &\iff \big(\exists (z_1;r_1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{+*}\,;\ \Omega \subset D(z_1;r_1]\big) .\end{aligned}$$

Définition 1.2. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si, pour tout $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $D(z;r[\subset \Omega$.*

Définition 1.3. *$F \subset \mathbb{C}$ est dit fermé si son complémentaire $\Omega = F^c = \mathbb{C} \setminus F$ est ouvert.*

Remarque 1.1. *Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{C}$ sont à la fois ouverts et fermés. On admet que ce sont les seuls ensembles de $\mathbb{C}$ qui vérifient cette propriété. (On peut cependant montrer ce résultat en exploitant la preuve de la proposition 3.3).*

Exercice 1.2. *Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r \geq 0$, le disque $D(z_0;r[$ est un ouvert et le disque $D(z_0;r]$ est un fermé.*

Proposition 1.2. *Réunions et intersections.*

1. *Toute réunion d'ensembles ouverts est un ouvert et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ouvert.*

2. *Toute intersection d'ensembles fermés est un fermé et toute réunion finie d'ensembles fermés est un fermé.*

S

Définition-Proposition 1.4. *Soit $A \subset \mathbb{C}$.*

1. *Il existe un plus grand ouvert inclus dans A. On l'appelle intérieur de A, noté $\mathring{A}$. De plus $\mathring{A} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \exists r > 0;\ D(z; r[\subset A\}$ et c'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.*

2. *Il existe un plus petit fermé contenant A. On l'appelle adhérence de A, notée $\overline{A}$. De plus $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \forall r > 0,\ D(z; r[\cap A \neq \emptyset\}$ et c'est l'intersection de tous les fermés contenant A.*

Définition 1.5. *Soit $A \subset \mathbb{C}$. On dit que*

1. *$z \in A$ est un point isolé de A s'il existe $r > 0$ tel que $D(z; r[\cap A = \{z\}$.*

2. *A est un ensemble discret si tous ses points sont isolés.*

3. *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A si, pour tout $r > 0$, $(D(z; r[\setminus\{z\}) \cap A \neq \emptyset$.*

On considère l'ensemble vide comme discret.

Remarque 1.2. *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A si et seulement si $z \in \overline{A \setminus \{z\}}$.*

Exemple 1.1. *$A = \{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est discret et admet 0 comme unique point d'accumulation.*

S

Remarque 1.3. *Soit Ω un ouvert non-vide. Tout $z \in \Omega$ est un point d'accumulation de Ω (cf. TD).*

1.1.3 Convergence de suites et de séries.

Là encore, on utilise la notion de convergence dans un espace normé, notion vue en L2.

S

Définition 1.6. *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N,\ |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsqu'elle existe, la limite est unique et on la note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Remarque 1.4. *La suite complexe $(z_n)_n$ converge (dans $\mathbb{C}$) vers ℓ si et seulement si les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ convergent (dans $\mathbb{R}$) respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$. Cela découle de la $\mathbb{R}$-linéarité de Re et Im et de l'encadrement*

L

$$\max\big(|\mathrm{Re}(z)|; |\mathrm{Im}(z)|\big) \ \leq\ |z|\ \leq\ |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|\,.$$

S

Proposition 1.3. *Soit $(z_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha, \ell, \ell' \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell'$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha z_n + w_n = \alpha\ell + \ell'$ et $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = \ell\ell'$. Si, de plus, $\ell' \neq 0$ alors $w_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.*

Démonstration. Ces résultats ont été démontrés en L1. $\square$

Les trois résultats suivants sont démontrés en L2.

S

Proposition 1.4. *Soit $F \subset \mathbb{C}$. L'ensemble F est fermé si et seulement si, pour toute suite $(z_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge (dans $\mathbb{C}$), sa limite appartient à F.*

Proposition 1.5. *Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. $z \in \overline{A}$ ssi il existe $(z_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.*

Corollaire 1.1. *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A ssi il existe $(z_n)_n \in (A \setminus \{z\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.*

Définition 1.7. *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$Z_n := \sum_{k=0}^{n} z_k$$

est la somme partielle d'ordre n de $(z_n)_n$. On dit que la série $\sum z_n$ converge si la suite $(Z_n)_n$ des sommes partielles converge. Dans ce cas, la limite, appelée somme de la série $\sum z_n$, est notée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \,.$$

Remarque 1.5. *En utilisant $\mathrm{Re}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(z_k)$, $\mathrm{Im}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(z_k)$ ainsi que la Remarque 1.4 on vérifie que la série $\sum z_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ convergent. Dans ce cas, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.*

Dans certaines situations, on n'a pas accès à la limite, c'est souvent le cas lorsqu'on étudie la convergence des séries, et la notion de suite de Cauchy joue alors un rôle important.

Définition 1.8. *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n, m \geq N,\ |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1. *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors la suite $(z_n)_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que $\mathbb{C}$ est complet.*

S

Démonstration. Voir L1. $\square$

Une importante conséquence de cette propriété est le résultat suivant.

Proposition 1.6. *Si $\sum |z_n|$ converge alors $\sum z_n$ converge.*

Démonstration. Si $\sum |z_n|$ converge alors la suite réelle $\left(\sum_{k=0}^{n} |z_k|\right)_n$ converge donc est de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq m \geq N,\ \left|\sum_{k=0}^{n} |z_k| - \sum_{k=0}^{m} |z_k|\right| = \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, on prend N comme ci-dessus. Pour tous $n \geq m \geq N$, on a

$$|Z_n - Z_m| = \left| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{m} z_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon,$$

d'après l'inégalité triangulaire (1.2) utilisée plusieurs fois. La suite des sommes partielles $(Z_n)_n$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème 1.1, elle converge, i.e. $\sum z_n$ converge.

S

1.1.4 Compacité.

De nouveau, on reprend des résultats de L1 et L2.

Définition 1.9. *Une sous-suite, ou suite extraite, d'une suite $(z_n)_n$ est une suite $(z_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.*

Proposition 1.7. *Si une suite $(z_n)_n$ converge vers un $\ell \in \mathbb{C}$ alors toute sous-suite de $(z_n)_n$ converge aussi vers ℓ.*

Définition 1.10. *On dit que $\ell \in \mathbb{C}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(z_n)_n$ s'il existe une sous-suite de $(z_n)_n$ qui converge vers ℓ.*

Définition 1.11. *Un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est dit compact si toute suite $(z_n)_n$ d'éléments de K admet une sous-suite qui converge dans K. Autrement dit, quelle que soit $(z_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in K$ tels que $\lim_{n\to\infty} z_{\varphi(n)} = \ell$.*

Proposition 1.8. *$K \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

Corollaire 1.2. *Soit $A \subset \mathbb{C}$. A est borné si et seulement si $\overline{A}$ est compact.*

Proposition 1.9. *Soit K une compact et F un fermé. La distance de K à F, définie par*

$$d(K;F) := \inf \big\{ |w - z| \,;\; w \in K \,,\; z \in F \big\}$$

est atteinte. De plus, si $K \cap F = \emptyset$, alors $d(K;F) > 0$ et l'ensemble

$$K' := \big\{ z \in \mathbb{C} \,;\; \exists\, w \in K \,;\; |z - w| \leq d(K;F)/2 \big\}$$

est un compact vérifiant $K' \cap F = \emptyset$.

Démonstration. Voir TD. □

1.1.5 Connexité par arcs

L

La notion d'ensemble connexe par arcs, voir la Définition 1.14 ci-dessous, est assez intuitive. Essentiellement, un ensemble est connexe par arcs s'il est "constitué d'un seul morceau". On peut voir cette notion comme l'analogue dans $\mathbb{C}$ de celle d'intervalle dans $\mathbb{R}$. On a besoin pour la définir de la notion de fonction continue d'un segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ que l'on retrouvera plus loin quand on parlera d'intégrale le long d'un chemin.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donc une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. D'après le cours de L2, la continuité de f est définie par

S

Définition 1.12. *Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est continue en $t_0 \in [a;b]$ si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ \forall\, t \in [a;b], \quad |t - t_0| < \delta \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur $[a;b]$ si elle est continue en tout $t_0 \in [a;b]$.

Remarque 1.6. *L'image de f est l'ensemble $f([a;b]) := \{f(t)\,;\, t \in [a,b]\}$. C'est une courbe (paramétrée) dans $\mathbb{C}$ et l'idée de la continuité est que, si f est continue, alors cette courbe est en un seul morceau. De plus, comme $[a;b]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et qu'une application continue d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ envoie un compact sur un compact (cf. L2 ou le début du paragraphe 1.2.2 ci-dessous), $f([a;b])$ est un compact de $\mathbb{C}$.*

L

TD

Exemple 1.2. *Courbes paramétrés.*

1. *Le segment d'extrêmités z_1 et z_2, noté $[z_1;z_2]$, est l'image de la fonction continue $\psi_{z_1;z_2} : [0;1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2$.*
2. *Le cercle $C(z_0;r)$ de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \geq 0$ est l'image de la fonction continue $\gamma_{z_0;r} : [0;2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ (cf. corollaire 2.4).*

S

Définition 1.13. *Soit $(a_1;b_1;a_2;b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$. Soit $f_1 : [a_1;b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_2 : [a_2;b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions continues telles que $f_1(b_1) = f_2(a_2)$ (les courbes se "recollent" en ce point). L'application continue $f : [a_1;b_1+b_2-a_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) && \text{si } t \in [a_1;b_1]\,, \\ f(t) &= f_2(t - b_1 + a_2) && \text{si } t \in [b_1;b_1+b_2-a_2]\,, \end{aligned}$$

est la concaténation, notée $f_1 \mathring{+} f_2$, de f_1 et f_2.

Proposition 1.10. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit $a = t_0 < \cdots < t_n = b$, $n \in \mathbb{N}^*$, une subdivision de $[a;b]$. Alors γ est la concaténation de ses restrictions aux intervalles $[t_0;t_1]$, ..., $[t_{n-1};t_n]$, i.e.*

$$\gamma \;=\; (\mathring{+})_{j=0}^{n-1}\, \gamma_{|[t_j;t_{j+1}]} \;=\; \gamma_{|[t_0;t_1]} \mathring{+} \cdots \mathring{+} \gamma_{|[t_{n-1};t_n]}\,.$$

De plus, une concaténation de fonctions continues est continue.

Démonstration. Voir TD. □

Définition 1.14. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que Ω est connexe par arcs si, pour tous points $z_1, z_2 \in \Omega$, il existe un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et une application continue $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ et, pour tout $t \in [a;b]$, on a $\gamma(t) \in \Omega$, autrement dit si n'importe quels points z_1, z_2 dans Ω peuvent être reliés par une courbe continue qui est incluse dans Ω.*

Remarque 1.7. *Dans la définition de connexe par arcs, on suppose souvent que $[a;b] = [0;1]$. Ce n'est pas restrictif. En effet, si $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est comme dans la définition ci-dessus alors la fonction $\tilde{\gamma} : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(a + u(b-a))$ est continue et vérifie $\tilde{\gamma}(0) = z_1$, $\tilde{\gamma}(1) = z_2$ et, pour tout $u \in [0;1]$, $\tilde{\gamma}(u) \in \Omega$.*

Définition 1.15. *On appelle* domaine *de $\mathbb{C}$ tout sous-ensemble ouvert, non vide et connexe par arcs de $\mathbb{C}$.*

S

On rencontre parfois des notions un peu plus fortes que la notion de connexité par arcs.

Définition 1.16. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que*

1. *Ω est convexe si, pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$, on a $[z_1; z_2] \subset \Omega$.*
2. *Ω est étoilé par rapport à $z_0 \in \Omega$ si, pour tout $z \in \Omega$, on a $[z_0; z] \subset \Omega$.*
3. *Ω est étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0.*

Proposition 1.11. *Un ensemble convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points. Un ensemble étoilé est connexe par arcs.*

TD

Démonstration. Soit Ω un convexe de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0; z] \subset \Omega$ car Ω est convexe, donc Ω est étoilé par rapport à z_0.
Soit Ω une partie de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$ tel que Ω est étoilé par rapport à z_0. Soit $(z_1; z_2) \in \Omega^2$. Soit γ la concaténation des courbes paramétrées continues $\psi_{z_1;z_0}$ et $\psi_{z_0;z_2}$ (cf. exemples 1.2). L'application γ est continue d'extrémités z_1 et z_2, d'après la proposition 1.10. Comme Ω est étoilé par rapport à z_0, on a $[z_0; z_1] \subset \Omega$ et $[z_0; z_2] \subset \Omega$ donc les courbes $\psi_{z_1;z_0}$ et $\psi_{z_0;z_2}$ sont à valeurs dans Ω et γ aussi. Ceci étant vrai pour tout $(z_1; z_2) \in \Omega^2$, Ω est connexe par arcs.
□

S

Remarque 1.8. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Les disques $D(z_0; r[$ et $D(z_0; r]$ sont convexes (cf. TD). Comme $D(z_0; r[$ est un ouvert (cf. exercice 1.2) et est convexe donc connexe par arcs (cf. proposition 1.11), $D(z_0; r[$ est un domaine de $\mathbb{C}$.*

1.2 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

L

Dans cette partie, on s'intéresser à la régularité de fonctions d'une partie de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ mais aussi de fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On utilisera le fait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.

S

1.2.1 Fonctions d'une variable complexe.

On considère d'abord des fonctions d'une variable complexe à valeurs dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on se retrouve dans le cadre d'un cours de L2.

Définition 1.17. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f tend vers ℓ lorsque z tend vers a, noté $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall z \in \Omega,\ |z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque 1.9. *La condition $a \in \overline{\Omega}$ assure que, quelque soit $\delta > 0$, l'ensemble $\{z \in \Omega\,;\ |z - a| < \delta\}$ n'est pas vide. C'est cela qui permet de garantir l'unicité de la limite, si elle existe. Lorsque $a \in \Omega$ et f tend vers ℓ en a alors, nécessairement, $\ell = f(a)$.*

Proposition 1.12. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \ell$ si et seulement si*

$$\forall (z_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}},\ \lim_{n \to \infty} z_n = a \implies \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \ell.$$

On a aussi, bien entendu, toutes les propriétés usuelles sur les limites (somme, produit, quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas et a une limite non nulle, composée lorsque c'est possible). Tout cela peut se montrer en reprenant les preuves vues en L1 sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut aussi déduire certaines de ces propriétés du cours de fonctions de plusieurs variables réelles de L2.

Définition 1.18. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. La fonction f est continue en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe. Elle est continue sur Ω si elle est continue en tout $z_0 \in \Omega$.*

Cette définition coïncide avec celle de la continuité pour les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Cette notion de continuité **n'est pas équivalente** à la continuité partielle par rapport à chaque variable réelle (cf. L2). En utilisant par exemple la Proposition 1.12, on montre les propriétés usuelles suivantes.

Proposition 1.13. *Opérations.*

1. *Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont continues. Si, de plus, g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.*

2. *Soit $f : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est continue sur Ω_f.*

Exemple 1.3. *Une application $\mathbb{R}$-linéaire $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue (cf. L2 et TD).*
Les fonctions $z \mapsto z$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ sont continues car elles sont $\mathbb{R}$-linéaires.
Les $z \mapsto c$ (pour un $c \in \mathbb{C}$) et $z \mapsto |z|$ sont continues car elles sont 1-lipschitziennes (cf. (1.3) et L2).
Par les opérations, les fonctions polynômes de z sont aussi continues. Si P et Q sont deux telles fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\,;\, Q(z) = 0\}$. On rappelle que, si Q est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, il possède au plus n racines, i.e. l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}\,;\, Q(z) = 0\}$ a au plus n éléments.
Par les opérations, les fonctions polynômes en les deux variables $(x; y)$ sont aussi continues (cf. L2).

S

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les principaux théorèmes vus en L1 concernant les fonctions continues sont : le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que toute fonction continue sur un segment soit bornée et atteigne ses bornes, i.e. elle admet un minimum et un maximum. Ici cela ne peut plus avoir de sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$: si z, z' sont deux nombres complexes arbitraires que signifie $z \leq z'$? On a, par contre, la généralisation suivante du second résultat.

Théorème 1.2. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors l'ensemble $f(K)$ est compact. En particulier il est borné, i.e. il existe M tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in K$. De plus la fonction $|f| : K \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum sur K.*

Démonstration. Soit $(w_n)_n \in (f(K))^{\mathbb{N}}$. On montre que $(w_n)_n$ admet une sous-suite qui converge dans $f(K)$, i.e. il existe une sous-suite $(w_{\varphi(n)})_n$ et $w \in f(K)$ tels que $\lim\limits_{n \to \infty} w_{\varphi(n)} = w$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in K$ tel que $w_n = f(z_n)$. La suite $(z_n)_n$ ainsi construite est à valeurs dans K qui est compact donc elle admet une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_n$

convergeant vers un certain $z \in K$. Comme f est continue, la suite de terme général $f(z_{\varphi(n)}) = w_{\varphi(n)}$ converge vers $w = f(z) \in f(K)$. La suite $(w_n)_n$ possède donc bien une sous-suite convergente dans $f(K)$, ce qui prouve que $f(K)$ est compact.
Le même raisonnement appliqué à la fonction continue $|f| : K \longrightarrow \mathbb{R}$ (c'est une composée de fonctions continues) montre que l'ensemble $|f|(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$. Il est donc fermé et borné. Soit $M := \sup_{z\in K} |f(z)| < \infty$. On va montrer que M est atteint. Comme $M := \sup_{z\in K} |f(z)|$, il existe $(w_n)_n$, $w_n = |f(z_n)|$, dans $|f|(K)$ telle que $w_n \to M$. Comme $|f|(K)$ est fermé, on a $M \in |f|(K)$, i.e. il existe $z_M \in K$ tel que $|f(z_M)| = |f|(z_M) = M$. La fonction $|f|$ admet donc bien un maximum. Par le même raisonnement, on montre que $|f|$ admet aussi un minimum sur K. $\square$

On utilisera aussi des suites et des séries de fonctions (cf. L2).

Définition 1.19. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

1. *La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur D vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ si, pour tout $z \in D$, la suite complexe $(f_n(z))_n$ converge $f(z)$.*

2. *La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur D vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ si la suite réelle*
$$\left(\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|\right)_n$$
est bien définie et tend vers 0.

3. *La série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur D vers une $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles*
$$\left(\sum_{n=n_0}^{N} f_n\right)_N$$
converge simplement (resp. uniformément) sur D.

4. *La série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge normalement sur D si la série réelle*
$$\left(\sum_{n=n_0}^{N} \sup_{z\in D} |f_n(z)|\right)_N$$
converge.

Proposition 1.14. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

1. *Si, pour tout n, f_n est continue et si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur D vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, alors f est continue.*

2. *Si la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge normalement sur D alors elle converge simplement sur D vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et cette convergence est uniforme sur D. Si, de plus, toutes les fonctions f_n sont continues, alors f l'est aussi.*

S

Démonstration. Voir un cours de L2. $\square$

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Comme c'est une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on peut voir si elle est différentiable (cf. L2).

Définition 1.20. *Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est différentiable en z_0 s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire L sur $\mathbb{C}$ telle que, pour $z \in \Omega$,*

$$f(z) \;=\; f(z_0) \,+\, L(z - z_0) \,+\, o\big(|z - z_0|\big)\,. \tag{1.4}$$

Dans ce cas, l'application $\mathbb{R}$-linéaire L est notée $Df(z_0)$.

Lorsque f est différentiable en $z_0 = (x_0; y_0)$, on a vu en L2 les propriétés suivantes :
Tout d'abord, f est continue en z_0; cela découle de (1.4) et du fait qu'une application $\mathbb{R}$-linéaire L sur $\mathbb{C}$ est forcément continue en 0 (cf. exemple 1.3).
On considère les applications composantes de f que l'on note P et Q. Donc $P : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont définies par $P(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ et $Q(z) = \mathrm{Im}(f(z))$. Puisque f est différentiable en z_0, P et Q admettent en z_0 des dérivées partielles (premières) par rapport aux deux variables réelles (on note par x la première et par y la seconde). En effet, on a, pour $t \in \mathbb{R}^*$ assez petit, d'après (1.4),

$$\frac{f(x_0 + t; y_0) - f(x_0; y_0)}{t} \;-\; L\big((1;0)\big) \;=\; o(1)$$

quand t tend vers zéro, ce qui donne, en prenant la partie réelle,

$$\frac{P(x_0 + t; y_0) - P(x_0; y_0)}{t} \;-\; \mathrm{Re}\Big(L\big((1;0)\big)\Big) \;=\; o(1)$$

quand t tend vers zéro. Même chose pour les autres dérivées partielles.
De plus, la matrice de l'application $\mathbb{R}$-linéaire $Df(z_0)$ dans la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0; y_0) \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0; y_0) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Lorsque f est différentiable en tout point de Ω, on peut considérer sa différentielle sur Ω, c'est-à-dire l'application $Df : \Omega \ni z \mapsto Df(z)$ qui est à valeurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ des applications $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}$. On peut munir cet espace de la norme

$$\|L\|_{op} \;:=\; \sup_{z \in \mathbb{C}^*} \frac{|L(z)|}{|z|} \;=\; \sup_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ |z| \le 1}} |L(z)| \;=\; \sup_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ |z| = 1}} |L(z)|\,. \tag{1.6}$$

La différentielle Df est donc une application d'un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel à valeurs dans un autre $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Ceci donne un sens à la définition suivante.

Définition 1.21. *Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est (de classe) C^1 (sur Ω) si f est différentiable en tout point de Ω et si sa différentielle est continue de Ω dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$.*

On peut repérer les fonctions de classe C^1 grâce à la

S

Proposition 1.15. *Classe C^1.*
Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. La fonction f est de classe C^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles premières de P et Q partout existent sur Ω et sont des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Voir L2. □

Exemple 1.4. *Les applications $\mathbb{C} \ni z \mapsto z$, $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z}$, $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ sont $\mathbb{R}$-linéaires donc partout différentiables de différentielle constante. La matrice dans la base canonique $(1; i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de ces différentielles est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivement.

1.2.2 Fonctions complexes d'une variable réelle.

S

On s'intéresse à la régularité de fonctions définies sur un segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. De nouveau, il s'agit de fonctions d'une partie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ à valeurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On procède donc comme au paragraphe précédent.
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour $t \in [a; b]$ et $\ell \in \mathbb{C}$, le fait que f tendent vers ℓ en t est défini par la définition 1.17 (avec $\Omega = \overline{\Omega} = [a; b]$ et a remplacé par t). La proposition 1.12 est encore valable et la continuité de f en t (resp. sur $[a; b]$) est définie comme dans la définition 1.18 (ou la définition 1.12). En utilisant le fait que les applications $\mathbb{R}^2 \ni (x; y) \mapsto x$ et $\mathbb{R}^2 \ni (x; y) \mapsto y$ sont continues (des deux variables), on peut vérifier la propriété suivante.

Proposition 1.16. *Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $t_0 \in [a; b]$. La fonction f est continue en t_0, resp. sur $[a; b]$, si et seulement si les fonctions réelles $\mathrm{Re}(f) : [a; b] \ni t \mapsto \mathrm{Re}\,(f(t))$ et $\mathrm{Im}(f) : [a; b] \ni t \mapsto \mathrm{Im}\,(f(t))$ sont continues en t_0, resp. sur $[a; b]$.*

La proposition 1.13 reste valable dans la présente situation en remplaçant, pour la composition, f et g par $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : [c; d] \longrightarrow \mathbb{C}$, respectivement. On a aussi la continuité de $g \circ f$ en t_0 si $g : f([a; b]) \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en $f(t_0)$.
En adaptant la preuve du théorème 1.2, on montre qu'une fonction continue $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée, que $f([a; b])$ est compact et que $|f|$ admet un minimum et un maximum.
Les résultats de la proposition 1.14 sont encore valables pour des suites (séries) de fonctions définies sur un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Comme dans la définition 1.20, on dit que f est différentiable en $t_0 \in]a; b[$ s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire L de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (cette fois !) telle que, pour tout $t \in [a; b]$,

$$f(t) \;=\; f(t_0) + L(t - t_0) + o\big(|t - t_0|\big)\,, \tag{1.7}$$

quand t tend vers t_0. Une application $\mathbb{R}$-linéaire L de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ a une forme particulière. Posons $w = L(1) \in \mathbb{C}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, d'après la $\mathbb{R}$-linéarité, $L(t) = L(t \cdot 1) = tL(1) = tw$. La propriété (1.7), quand t tend vers t_0, est donc équivalente à

$$f(t) \;=\; f(t_0) + (t - t_0)w + o\big(|t - t_0|\big)\,, \tag{1.8}$$

quand t tend vers t_0, ce qui est encore équivalent à

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = w\,. \tag{1.9}$$

Définition 1.22. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $t_0 \in [a;b]$. On dit que f est dérivable en t_0 si la limite dans (1.9) existe dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, cette limite est le nombre dérivé de f en t_0, noté $f'(t_0)$.*

Dans le cadre de cette définition 1.22, on voit que f est dérivable en t_0 si et seulement si f est différentiable en t_0. De plus, dans ce cas, la différentielle de f en t_0 est l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{R} \ni t \mapsto tf'(t_0) \in \mathbb{C}$.
On remarque que, si f est dérivable en t_0, f est continue en t_0 d'après (1.8).
On a naturellement la

Définition 1.23. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est (de classe) C^1 (sur $[a;b]$) si f est dérivable en tout point de $[a;b]$ et si sa dérivée $f' : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$, qui à $t \in [a;b]$ associe $f'(t) \in \mathbb{C}$, est continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 1.10. *Dans le cadre de cette définition 1.23, on peut montrer que f est C^1 sur $[a;b]$ si et seulement si f est C^1 sur $[a;b]$ au sens vu en L2 c'est-à-dire si et seulement si f est différentiable sur $[a;b]$ et sa différentielle est continue (pour la norme (1.6)).*
Par ailleurs, on peut vérifier (cf. TD) que f est dérivable en t_0 (resp. dérivable, resp. C^1) si et seulement si $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ le sont. Dans ce cas, $f'(t_0) = (\mathrm{Re}f)'(t_0) + i(\mathrm{Im}f)'(t_0)$.

Dans la suite, la notion suivante sera particulièrement importante.

Définition 1.24. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est (de classe) C^1 par morceaux (sur $[a;b]$) s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ de $[a;b]$ tels que, pour tout $j \in (\mathbb{N} \cap [0;n-1])$, f est dérivable sur $]t_j;t_{j+1}[$ et la restriction de f' à $]t_j;t_{j+1}[$ admet une limite complexe en t_j et en t_{j+1}.*

$\boxed{S}$

Il est commode de reformuler, à l'aide de la notion de concaténation (cf. définition 1.13), cette définition de la façon équivalente suivante :

Proposition 1.17. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$.*

1. *Si la fonction f est C^1, elle est continue et C^1 par morceaux.*
2. *La fonction f est continue et C^1 par morceaux si et seulement si f est la concaténation d'un nombre fini de fonctions C^1 sur un segment.*
3. *Si la fonction f est continue et C^1 par morceaux alors il existe une unique famille finie f_0, ..., f_n ($n \in \mathbb{N}$) de courbes C^1 sur un segment telle que f est la concaténation de f_1, ..., f_n et, pour tout $t \in [a;b]$ tel que, pour un j, $f_{j-1}(t) = f_j(t)$, f n'est pas dérivable en t.*

Démonstration. Voir TD. $\square$

Enfin, si $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, on définit son intégrale sur le segment $[a;b]$ par

$$\int_a^b f := \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}\,, \tag{1.10}$$

où les intégrales à droite de l'égalité sont des intégrales usuelles (de Riemann) de fonctions continues de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \;:=\; -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Si f est la dérivée d'une fonction $F:[a;b]\longrightarrow\mathbb{C}$ alors on vérifie, en utilisant (1.10), que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(b)\,-\,F(a) \;=:\; [F]_a^b\,. \tag{1.11}$$

S

Les propriétés de changement de variables, d'intégration par parties et de relation de Chasles des intégrales usuelles passent par la formule (1.10) aux nouvelles intégrales. Toujours grâce à cette formule, on vérifie que, si $g:[a;b]\longrightarrow\mathbb{C}$ est continue et $\lambda\in\mathbb{C}$, on a

$$\int_a^b \big(\lambda f(t)\,+\,g(t)\big)\,\mathrm{d}t \;=\; \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.12}$$

On a aussi (cf. TD) l'inégalité

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.13}$$

où l'intégrale à droite de l'inégalité est encore l'intégrale usuelle de la fonction réelle continue $|f|$. On utilisera souvent le résultat suivant :

Proposition 1.18. *Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\le b$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{C}$ (au sens de la définition 1.19 avec $D=[a;b]$). D'après la proposition 1.14, f est continue donc son intégrale sur $[a;b]$ est bien définie. Alors la suite complexe*

$$\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n \quad \textit{converge vers} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

En particulier, pour une suite $(g_n)_n$ de fonctions continues sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, si la série de fonctions $\sum_{n\ge n_0} g_n$ converge uniformément vers une fonction $g:[a;b]\longrightarrow\mathbb{C}$ alors g est continue et la série complexe

$$\sum_{n\ge n_0}\int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{converge vers} \quad \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,,\ \textit{i.e.}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} g_n(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a, d'après (1.12) et (1.13),

$$0\le\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\le\; \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \;\le\; (b-a)\,\sup_{x\in[a;b]}|f_n(x)-f(x)|$$

et le résultat découle de la convergence uniforme et du théorème des gendarmes. $\square$

1.2.3 Intégrale le long d'un chemin.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. L'objectif ici est de construire une "intégrale de f le long d'une courbe paramétrée convenable tracée dans Ω".

Définition 1.25. *Chemins. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. L'image de γ est l'ensemble $\Gamma := \gamma([a;b]) \subset \mathbb{C}$. On a déjà remarqué que l'ensemble Γ est un compact si γ est continue.*

1. *On dit que γ est un* chemin *si $a = b$ ou bien si $a < b$ et si γ est continue et C^1 par morceaux.*
2. *Un chemin $\gamma : [a;a] \longrightarrow \mathbb{C}$ est dit C^1.*
3. *Un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $a < b$ est dit C^1 si l'application γ est C^1.*
4. *Un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $a \leq b$ est dit* fermé *si $\gamma(a) = \gamma(b)$, i.e. les points de départ et d'arrivée sont identiques.*

S

5. *Un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $a < b$ est dit* simple *si γ est injectif sur $[a;b[$, i.e. mis à part éventuellement à ses extrêmités, γ ne passe pas deux fois par le même "point de $\mathbb{C}$".*
6. *Un chemin fermé simple est appelé un* lacet.

Exemple 1.5. *Chemins classiques.*

1. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. L'application constante $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $t \in [a;b]$, $\gamma(t) = z_0$, est un chemin C^1.*
2. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it}$. Il se trouve que γ est C^1 et que $\gamma'(t) = ire^{it}$. C'est donc un chemin C^1. Comme $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, il est fermé. Il se trouve que la restriction de γ à $[0;2\pi[$ est injective. Donc γ est simple. Il s'agit donc d'un lacet. L'image Γ de γ est le cercle $C(z_0;r)$. On remarque que les fonctions $[0;\pi[\ni t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ et $]\pi;2\pi] \ni t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ sont croissantes. On dit que γ est orienté positivement ou que Γ est parcouru dans le sens trigonométrique positif. Tout cela sera justifié plus loin (cf. corollaire 2.4).*

TD

3. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{-it}$. Comme au 2, γ est un lacet C^1 d'image $\Gamma = C(z_0;r)$. Cette fois les applications $[0;\pi[\ni t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ et $]\pi;2\pi[\ni t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ sont décroissantes. On dit que γ est orienté négativement ou que Γ est parcouru dans le sens trigonométrique négatif.*
4. *Pour $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$, on considère l'application $\psi_{z_1;z_2} : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\psi_{z_1;z_2}(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2$. C'est un chemin C^1 dont l'image est le segment $[z_1;z_2]$ (cf . TD) et est parcourue de z_1 vers z_2 dans le sens croissant des t. Si $z_1 \neq z_2$, γ est un chemin simple.*

Définition 1.26. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin C^1 dont l'image est incluse dans Ω, i.e. tel que $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset \Omega$. On appelle intégrale de f le long de γ le nombre complexe*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.14}$$

Si $a \in \mathbb{R}$ et $\gamma : [a;a] \longrightarrow \Omega$, on pose

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; 0\,. \tag{1.15}$$

La définition (1.14) est assez naturelle. Le long du chemin γ on a $z = \gamma(t)$ et tout se passe "comme si" on faisait le changement de variable $z = \gamma(t)$, le $\mathrm{d}z$ donnant alors le $\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ comme pour les changements de variables dans les intégrales dans $\mathbb{R}$. Attention, ce n'est cependant pas un changement de variable qu'on fait ici mais bien la définition de la quantité à gauche de (1.14).
Il est important pour la suite d'étendre cette notion au cas où le chemin γ n'est que C^1 par morceaux. Pour ce faire, on utilise la proposition 1.17.

$\boxed{S}$

Définition 1.27. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ (avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$) un chemin dont l'image est incluse dans Ω, i.e. tel que $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset \Omega$. Soit γ_1, ..., γ_n la famille de chemins C^1 donnée par le 2 de la proposition 1.17, dont la concaténation donne γ. On appelle intégrale de f le long de γ le nombre complexe*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{1.16}$$

Exemple 1.6. *Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ et γ un paramétrage du segment d'extrêmités α et β. Par exemple, $\gamma : [0;1] \ni t \mapsto \alpha + t(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}$. Étant donnée une fonction continue f sur $\mathbb{C}$, on a alors, puisque $\gamma'(t) = \beta - \alpha$, pour tout t, par changements de variables $s = \alpha + t(\beta - \alpha)$ et $r = \alpha + \beta - s$,*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 f\big(\alpha + t(\beta-\alpha)\big)\cdot(\beta - \alpha)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_\alpha^\beta f(s)\,\mathrm{d}s \;=\; -\int_\beta^\alpha f(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Lorsque $\alpha \leq \beta$, on retrouve l'intégrale (1.10) entre α et β de la restriction de f à $[\alpha;\beta]$. Lorsque $\beta \leq \alpha$, on retrouve l'opposé de l'intégrale (1.10) entre β et α de la restriction de f à $[\beta;\alpha]$.
Dans le cas $\alpha \leq \beta$, on peut aussi paramétrer le segment $[\alpha;\beta]$ par $\tilde{\gamma} : [\alpha;\beta] \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$. On a alors $\tilde{\gamma}'(t) = 1$, pour tout t, et on retrouve à nouveau

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On déduit de la propriété (1.12) et de (1.14) et (1.16), la

Proposition 1.19 (Linéarité). *Soit Ω un ouvert non vide, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ (avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$) un chemin dont l'image est incluse dans Ω. Alors*

$$\int_\gamma (\lambda f + g)(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \lambda \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

TD

Exemple 1.7. *Intégrales le long d'arcs de cercle.*

1. *Soit* γ_1 *et* γ_2 *les chemins définis par* $\gamma_1 : [0;\pi/2] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ *et* $\gamma_2 : [0;3\pi/2] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{-it} \in \mathbb{C}$*. L'image* Γ_1 *de* γ_1 *est le quart de cercle de centre* 0 *et de rayon* r *partant du point d'affixe* r *et allant au point d'affixe* ir *dans le sens trigonométrique positif (on parle aussi de sens direct) tandis que l'image de* γ_2 *est le trois-quart de cercle de centre* 0 *et de rayon* r *partant du point d'affixe* r *et allant au point d'affixe* ir *dans le sens inverse du sens trigonométrique négatif (on parle de sens indirect). Leurs images* Γ_1 *et* Γ_2 *sont incluses dans* $\mathbb{C}^*$*. Tout ceci est justifié par les propriétés de l'exponentielle complexe (cf. théorème 2.1).*
Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par* $f(z) = 1/z$*. Elle est continue. On a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r\mathrm{e}^{it}} \times ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; i\frac{\pi}{2},$$

tandis que

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{3\pi/2} \frac{1}{r\mathrm{e}^{-it}} \times (-ir)\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t \;=\; -i\frac{3\pi}{2}.$$

On peut voir sur cet exemple que l'intégrale de f *entre les deux points d'affixes respectives* r *et* ir *dépend a priori du chemin choisi puisque les intégrales le long de* γ_1 *et de* γ_2 *sont différentes.*

2. *Considérons maintenant les chemins* $\gamma_3 : [0;\pi/4] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{i2t} \in \mathbb{C}$ *et* $\gamma_4 : [3\pi/2;2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{-it} \in \mathbb{C}$*. L'image de* γ_3 *est* Γ_1 *parcourue dans le même sens que* γ_1 *tandis que celle de* γ_4 *est* Γ_1 *mais parcourue dans le sens inverse. On a*

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{\pi/4} \frac{1}{r\mathrm{e}^{i2t}} \times 2ir\mathrm{e}^{i2t}\,\mathrm{d}t \;=\; i\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{-it}} \times (-ir)\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t \;=\; -i\frac{\pi}{2}\,.$$

On peut voir que l'intégrale le long de γ_3 *est la même que pour* γ_1 *(les images des chemins sont les mêmes et parcourues dans le même sens) tandis que celle le long de* γ_4 *en est l'opposée (l'image est la même mais parcourue dans le sens inverse).*

3. *On considère enfin les chemins* $\gamma_5 : [0;2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ *et* $\gamma_6 : [0;4\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$*. Leurs images sont le cercle* $C(0;r)$ *parcouru dans le sens trigonométrique positif, une fois pour* γ_5 *et deux fois pour* γ_6*. On calcule facilement cette fois que* $\displaystyle\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi$ *et* $\displaystyle\int_{\gamma_6} f(z)\,\mathrm{d}z = 4i\pi = 2\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z$*. Le fait de parcourir deux fois le cercle a pour effet de compter double l'intégrale de* f*.*

Les propriétés 2. et 3. observées dans l'exemple ci-dessus sont assez naturelles et ne sont pas un cas particulier.

S

Définition 1.28. *Soit* $(a_1;b_1;a_2;b_2) \in \mathbb{R}^4$ *tel que* $a_1 < b_1$ *et* $a_2 < b_2$*. Soit* $\gamma_1 : [a_1;b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $\gamma_2 : [a_2;b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ *deux chemins.*

1. *On dit que γ_1 est* équivalent *à γ_2 s'il existe une bijection, C^1 et strictement croissante, $\varphi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Dans ce cas, les images de γ_1 et γ_2 sont les même, parcourues dans le même sens.*

2. *On dit que γ_1 est* opposé *à γ_2 s'il existe une bijection, C^1 et strictement décroissante, $\varphi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Dans ce cas, les images de γ_1 et γ_2 sont les même mais γ_1 et γ_2 parcourent l'image dans des sens opposés.*

Remarque 1.11. *On a vu en L1 qu'une application $\varphi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$, bijective et continue, est forcément strictement monotone.*

Définition 1.29. *Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Si $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, on notera $\gamma_{\text{opp}} : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_{\text{opp}}(t) = \gamma(a + b - t)$. L'image de γ_{opp} est la même que celle de γ mais parcourue dans le sens inverse. Comme $[a; b] \ni t \mapsto a + b - t \in [a; b]$ est bijective, C^1 et strictement décroissante, γ_{opp} est opposé à γ.*
Si $\gamma : [a; a] \longrightarrow \mathbb{C}$, on pose $\gamma_{\text{opp}} = \gamma$.

Proposition 1.20. *Soit Ω un ouvert non vide, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et γ_1, γ_2 deux chemins d'images incluses dans Ω.*

S

1. *Si γ_1 est* équivalent *à γ_2 alors $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.*

2. *Si γ_1 est* opposé *à γ_2 alors $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$. En particulier, pour tout chemin γ, on a $\displaystyle\int_{\gamma_{\text{opp}}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.*

Démonstration. Voir TD. □

On est parfois amené à décomposer un chemin en plusieurs morceaux. On a alors la propriété suivante qui est l'analogue de la relation de Chasles.

Proposition 1.21. *Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \leq b \leq c$. Soit $\gamma_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b; c] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. La concaténation $\gamma = \gamma_1 \mathring{+} \gamma_2$ est bien définie (cf. définition 1.13) et γ est aussi un chemin. Si Ω est un ouvert contenant l'image de γ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue alors*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Corollaire 1.3. *Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut considérer le chemin fermé γ_n obtenu par concaténation de n copies de γ. Alors, pour tout ouvert Ω tel que $\gamma([a; b]) \subset \Omega$ et toute fonction continue $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, on a*

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; n \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ces deux résultats sont démontrés en TD.

Une autre propriété courante de l'intégrale pour les fonctions de variable(s) réelle(s) est l'inégalité (1.13). Ici, il faut faire un peu plus attention. On ne peut pas simplement comparer

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \quad \text{et} \quad \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$$

puisque cette dernière quantité est a priori un nombre complexe (le "dz" est complexe). Prenons par exemple la fonction $f(z) = 1/z$ et γ le quart de cercle comme dans l'Exemple 1.7. On a alors

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;=\; \left| \int_0^{\pi/2} \frac{1}{re^{it}} \times ire^{it}\,\mathrm{d}t \right| \;=\; \left| i\frac{\pi}{2} \right| \;=\; \frac{\pi}{2}$$

tandis que

$$\int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} \times ire^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\mathrm{e}^{it}\right]_0^{\pi/2} \;=\; i-1\,.$$

On ne peut pas comparer $\pi/2$ et $i-1$. A-t-on la propriété suivante, qui au moins a un sens,

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\leq\; \left| \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z \right| \,?$$

Pas en général puisque, dans l'exemple précédent, $\pi/2 > |i-1| = \sqrt{2}$.
En revanche, on peut écrire, lorsque γ est C^1,

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;=\; \left| \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \right| \;\leq\; \int_a^b \left|f\left(\gamma(t)\right)\right| \times \left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t\,,$$

d'après (1.13). On utilisera régulièrement ce type de majoration par la suite, voir par exemple l'application à la fin de la Section 4.3.
La présence du terme $|\gamma'(t)|$, au lieu de $\gamma'(t)$, fait qu'on ne reconnait pas dans cette dernière intégrale une intégrale le long d'un chemin. En majorant, pour tout $t \in [a;b]$, la quantité $|f(\gamma(t))|$ par sa borne supérieure, on en déduit, toujours pour γ de classe C^1,

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\leq\; \left(\sup_{t\in[a,b]} \left|f\big(\gamma(t)\big)\right| \right) \times \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.17}$$

La dernière intégrale ne dépend que du chemin γ et a une interprétation géométrique naturelle. C'est en fait la longueur du chemin γ. À part sur quelques exemples simples, cela ne paraît pas clair mais on peut le démontrer (cf. TD).
Si γ n'est pas C^1 mais seulement C^1 par morceaux, on exploite la proposition 1.17. On obtient d'abord la longueur d'un tel chemin et on vérifie que (1.17) est encore valable.

Définition 1.30. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin C^1. On appelle longueur de γ la quantité*

$$L(\gamma) \;=\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.18}$$

Lorsque γ est seulement C^1 par morceaux, γ est la concaténation des chemins C^1 γ_1, ..., γ_n donnés par le 2 de la proposition 1.17 et on pose

$$L(\gamma) \;=\; \sum_{k=1}^{n} L(\gamma_k)\,. \tag{1.19}$$

Si $\gamma : [a;a] \longrightarrow \mathbb{C}$, sa longueur $L(\gamma)$ est choisie nulle.

Remarque 1.12. *En TD, on donne une définition plus naturelle et plus intuitive de la longueur d'une courbe paramétrée et on montre l'égalité (1.18) pour les chemins C^1 et (1.19) pour les autres. Cela montre, en particulier, que la définition (1.19) ne dépend pas du choix de concaténation de chemins donnant γ. Comme un chemin C^1 est aussi une concaténation de chemins C^1 (cf. proposition 1.10), on peut appliquer (1.19) dans ce cas et retrouver la valeur de (1.18).*

On peut alors adapter le raisonnement précédent pour montrer (cf. TD) la

Proposition 1.22. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$, $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ un chemin et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\leq\; L(\gamma) \cdot \sup_{t \in [a;b]} \left| f\big(\gamma(t)\big) \right| \;=\; L(\gamma) \cdot \sup_{w \in \gamma([a;b])} |f(w)|\,.$$

Proposition 1.23. *Si γ_1 est équivalent ou opposé à γ_2 alors $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.*

Démonstration. Voir TD. □

Exemple 1.8. *Soit $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$. Soit $\gamma : [0;1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$, qui est de classe C^1. On a $\gamma([0;1]) = [z_1;z_2]$. Comme $\gamma'(t) = z_2 - z_1$, on trouve donc, évidemment, $L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1|\,\mathrm{d}t = |z_2 - z_1|$. Soit σ la concaténation de γ et γ_{opp}. On a $\sigma([0;1]) = [z_1;z_2]$ mais*
$\boxed{\text{S}}$ *$L(\sigma) = 2|z_2 - z_1|$.*

Remarque 1.13. *Au vu de l'exemple précédent, il est naturel de définir la longueur de l'image d'un chemin $\gamma_0 : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ par la longueur $L(\gamma)$ d'un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\gamma([a;b]) = \gamma_0([c;d])$ et la restriction de γ à $[a,b[$ est injective.*
En paramétrant le cercle $C(z_0,r)$ par le lacet $\gamma : [0;2\pi] \ni t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{it}$, la longueur du cercle est donc $L(\gamma)$ et on retrouve

$$L(\gamma) \;=\; \int_0^{2\pi} \left| ir\mathrm{e}^{it} \right| \mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t \;=\; 2\pi r\,.$$

Remarquez que, pour démontrer ça, on a utilisé la construction de π telle que donnée dans le théorème 2.1 et les propriétés qui en ont suivi. La définition de π donnée dans le théorème 2.1 coincide donc bien avec la définition usuelle reliant le rayon d'un cercle avec son périmètre. Plus généralement, si $\theta \in [0;2\pi[$, l'arc de cercle de centre 0 et allant du point d'affixe 1 au point d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta}$ est paramétré par le chemin simple C^1 $\gamma : [0;\theta] \ni t \mapsto \mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ donc sa longueur est

$$L(\gamma) \;=\; \int_0^\theta \left| i\mathrm{e}^{it} \right| \mathrm{d}t \;=\; \theta\,.$$

On termine ce paragraphe par l'équivalent de la proposition 1.18 pour les intégrales le long d'un chemin.

Proposition 1.24. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin d'image Γ. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur Γ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ (au sens de la*

S

définition 1.19 avec $D = \Gamma$). D'après la proposition 1.14, f est continue donc son intégrale le long de γ est bien définie. Alors la suite complexe

$$\left(\int_\gamma f_n(w)\,\mathrm{d}w\right)_n \quad \textit{converge vers} \quad \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

En particulier, pour une suite $(g_n)_n$ de fonctions continues sur Γ à valeurs dans $\mathbb{C}$, si la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} g_n$ converge uniformément vers une fonction $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ alors la série complexe

$$\sum_{n\geq n_0}\int_\gamma g_n(w)\,\mathrm{d}w \quad \textit{converge vers} \quad \int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w\,,\ \textit{i.e.}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_\gamma g_n(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_\gamma\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} g_n(w)\right)\mathrm{d}w\,.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après les propositions 1.19 et 1.22,

$$0 \leq \left|\int_\gamma f_n(w)\,\mathrm{d}w - \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w\right| = \left|\int_\gamma \big(f_n(w) - f(w)\big)\,\mathrm{d}w\right| \leq L(\gamma)\sup_{w\in\Gamma}\big|f_n(w) - f(w)\big|$$

et le résultat découle de la convergence uniforme sur Γ et du théorème des gendarmes. $\square$

1.3 Holomorphie.

S

Pour les fonctions d'une variable complexe dans un ouvert, on va définir une notion de $\mathbb{C}$-dérivabilité ou holomorphie.

1.3.1 Définition et premières propriétés.

Pour parler de $\mathbb{C}$-dérivabilité, on considère un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$.

Définition 1.31. *Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$.*

1. *On dit que f est holomorphe ou $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.20}$$

   admet une limite (dans $\mathbb{C}$), lorsque $z \to z_0$. Dans ce cas, on note $f'(z_0)$ cette limite. C'est le nombre $\mathbb{C}$-dérivé de f en z_0.

2. *On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable ou* holomorphe *sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout $z_0 \in \Omega$.*

3. *On dit que f est une fonction* entière *si f est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C}$.*

4. *On dit que f est de classe C^1_h (sur Ω) si elle est $\mathbb{C}$-dérivable (sur Ω) et si la fonction $f' : \Omega \ni z \mapsto f'(z)$ est continue. Par récurrence, elle est C^k_h, $k \geq 2$, si elle est C^{k-1}_h et si la dérivée $(k-1)$-ième $f^{(k-1)}$ est C^1_h. Elle est C^∞_h si elle est C^k_h, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque 1.14. *Exemples et contre-exemples simples. Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.*

1. *Si f est une fonction constante sur Ω, f est holomorphe en tout point $z_0 \in \Omega$ et sa $\mathbb{C}$-dérivée $f' : \Omega \ni z \mapsto f'(z)$ est nulle, donc continue. Donc f est C_h^1 sur Ω. Comme f' est constante, elle est aussi C_h^1 donc f est C_h^2. Par récurrence, on vérifie que f est C_h^∞ sur Ω.*

2. *Si f est l'identité sur Ω alors f est holomorphe en tout point $z_0 \in \Omega$ et sa $\mathbb{C}$-dérivée $f' : \Omega \ni z \mapsto f'(z)$ est la fonction constante égale à 1 sur Ω. Comme au 1, on vérifie que f est C_h^∞ sur Ω.*

3. *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \overline{z}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Le taux de variation (1.20) n'a pas de limite dans $\mathbb{C}$ lorsque $z \to z_0$. Vérifions cela.*
Supposons que ce taux tendent vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors, pour toute application $\gamma :]0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tendant vers z_0 en 0, le taux
$$\frac{\overline{\gamma(t)} - \overline{z_0}}{\gamma(t) - z_0}$$
$\boxed{S}$
tend vers ℓ, quand $t \to 0$. En prenant $\gamma :]0;1] \ni t \mapsto z_0 + t$, on trouve que ce taux tend vers 1 mais, en prenant $\gamma :]0;1] \ni t \mapsto z_0 + it$, on trouve qu'il tend vers -1. Donc $1 = \ell = -1$, contradiction.

4. *De même, on vérifie que $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont nulle part holomorphes.*

5. *On a vu dans l'exemple 1.4 que les applications $\overline{\cdot}$, Re et Im sont partout différentiables. Les points 3 et 4 prouvent que les notions d'holomorphie et de différentiabilité sont distinctes.*

6. *L'emploi du mot "holomorphe" sera expliqué dans la remarque 4.7.*

Dans le cadre de la définition 1.31, on voit que le taux de variation (1.20) admet $\ell \in \mathbb{C}$ pour limite, lorsque $z \to z_0$, si et seulement si le taux

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

tend vers ℓ, lorsque $h \to 0$ (dans $\mathbb{C}$), si et seulement si

$\boxed{S}$

$$f(z_0 + h) \;=\; f(z_0) \;+\; \ell \cdot h \;+\; o(|h|)\,, \tag{1.21}$$

lorsque $h \to 0$ (dans $\mathbb{C}$), si et seulement si

$$f(z) = f(z_0) + \ell \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)\,, \tag{1.22}$$

quand $z \to z_0$.
En particulier, on voit en utilisant (1.22) par exemple que, si f est holomorphe en z_0, f est continue en z_0.
Les propriétés suivantes se montrent alors comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en utilisant par exemple (1.21).

Proposition 1.25. *Opérations. Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.*

S

1. *Soit* $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorphes (resp.* C_h^1*) et* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Alors les fonctions* $f + \lambda g$ *et* fg *sont holomorphes (resp.* C_h^1*) et on a, pour tout* $z_0 \in \Omega$*,*
$$(f+\lambda g)'(z_0) \;=\; f'(z_0) + \lambda g'(z_0) \quad \text{et} \quad (fg)'(z_0) \;=\; f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\,.$$
Si, de plus, g *ne s'annule pas, alors* $\frac{f}{g}$ *est holomorphe (resp.* C_h^1*) et on a*
$$\forall\, z_0 \in \Omega\,, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) \;=\; \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,.$$
2. *Soit* $f : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $g : \Omega_g \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorphes (resp.* C_h^1*) et telles que* $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$*. Alors* $g \circ f$ *est holomorphe (resp.* C_h^1*) sur* Ω_f *et on a* $(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \times g'(f(z_0))$*, pour tout* $z_0 \in \Omega_f$*.*
3. *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$ *et* I *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$*. Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorphe (resp.* C_h^1*) et* $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ *dérivable (resp.* C^1*). Alors la composée* $f \circ \gamma$ *est dérivable (resp.* C^1*) sur* I *et, pour tout* $t \in I$*,* $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \times \gamma'(t)$*.*

Exercice 1.3. *Montrez la proposition ci-dessus.*

S

Exemple 1.9. *Fonctions polynômes.*

1. *En utilisant la proposition 1.25 et les points 1 et 2 de la remarque 1.14, on montre que les fonctions polynômes sur* $\mathbb{C}$*, c'est-à-dire les fonctions* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *du type*
$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{d} a_k\, z^k \quad \text{pour des } a_k \in \mathbb{C}\,,$$
sont C_h^1 *sur* $\mathbb{C}$*. Si* P *et* Q *sont deux fonctions polynômes alors* $f = \frac{P}{Q}$ *est* C_h^1 *sur* $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\,;\, Q(z) = 0\}$*, par la proposition 1.25.*
2. *Soit* $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par* $g(z) = |z|^2$*. C'est une fonction polynôme en les variables réelles* $x = \mathrm{Re}(z)$ *et* $y = \mathrm{Im}(z)$ *puisque* $g(x;y) = x^2 + y^2$*. Comme fonction de ces deux variables réelles, elle est de classe* C^∞*. Mais* g *n'est holomorphe qu'en* 0*. Vérifions ce dernier point.*

L

Pour $z \in \mathbb{C}^*$*, on a* $|(g(z) - g(0))/z| = |z|$*, qui tend vers* 0*, lorsque* $z \to 0$*. Donc* g *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en* 0 *de nombre* $\mathbb{C}$*-dérivé* 0*.*
Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ *et* $z \neq z_0$*. On a*
$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \;=\; \frac{|z - z_0 + z_0|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} \;=\; \frac{|z - z_0|^2 + (z - z_0)\overline{z_0} + \overline{z - z_0} \cdot z_0}{z - z_0}$$
$$\;=\; \frac{|z - z_0|^2}{z - z_0} + \overline{z_0} + z_0 \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}\,.$$
Le premier terme à droite de l'égalité tend vers 0*, quand* $z \to z_0$*, car son module est majoré par* $|z - z_0|$*. Si le terme de gauche de l'égalité avait une limite dans* $\mathbb{C}$*, lorsque* $z \to z_0$*, il en serait de même du dernier terme à droite de l'égalité et, comme* $z_0 \neq 0$*, le rapport* $\overline{z - z_0}/(z - z_0)$ *aurait une limite, lorsque* $z \to z_0$*. Contradiction avec le point 3 de la remarque 1.14.*

Définition 1.32. *Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que F est une primitive de f sur Ω si F est holomorphe sur Ω et sa $\mathbb{C}$-dérivée F' est égale à f.*

Exemple 1.10. *Puissances.*

S

1. *Si $m \in \mathbb{N}$, la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^m$ admet, pour primitive sur $\mathbb{C}$, la fonction $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \frac{1}{m+1}\, z^{m+1}$.*

2. *Si $m \in ((-\mathbb{N}) \setminus \{-1\})$, la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = z^m$ admet, pour primitive sur $\mathbb{C}^*$, la fonction $F : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \frac{1}{m+1}\, z^{m+1}$.*

3. *On verra plus loin que la fonction $z \mapsto 1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ (cf. exemple 1.11).*

Bien qu'à première vue tout semble similaire à ce qu'on fait dans $\mathbb{R}$, on va voir qu'il n'en est rien et que le fait de prendre des (limites de) taux d'accroissements dans $\mathbb{C}$ a de grosses conséquences:

L

1. il va être beaucoup "plus difficile" à une fonction d'être $\mathbb{C}$-dérivable qu'à une fonction d'une variable réelle d'être dérivable. La fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|^2$, par exemple, est dérivable mais on a vu que $z \mapsto |z|^2$ n'était pas $\mathbb{C}$-dérivable.
   En parlant de fonctions non $\mathbb{C}$-dérivables, on a vu que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ était continue sur $\mathbb{C}$ mais $\mathbb{C}$-dérivable nulle part. Essayez de construire une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit continue partout mais dérivable nulle part... C'est faisable, mais beaucoup plus difficile.

2. les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables auront beaucoup plus de propriétés que les fonctions réelles dérivables d'une variable réelle. La plus frappante au début est sûrement le fait qu'une fonction holomorphe sera automatiquement C^∞_h.

S

3. les fonctions d'une variable complexe qui sont continues n'ont pas forcément de primitive. C'est un peu relié au point précédent : si f a une primitive alors il existe F holomorphe telle que $F' = f$. Donc, d'après ce qu'on a dit dans le point précédent, F sera C^∞_h et donc f aussi. En particulier f sera holomorphe. Conclusion : seules les fonctions holomorphes sur Ω peuvent avoir une primitive sur Ω.
   Attention, on ne dit pas que toutes les fonctions holomorphes sur Ω ont une primitive sur Ω. Ce ne sera par exemple pas le cas de la fonction $z \mapsto 1/z$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Peut-on utiliser les primitives pour calculer des intégrales le long d'un chemin ? Oui, comme le montre la

Proposition 1.26. *Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une primitive F. Alors, pour tout chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ (avec $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$),*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\,. \tag{1.23}$$

En particulier, si γ est fermé alors l'intégrale précédente est nulle.

Remarque 1.15. *On suppose que f admet une primitive F sur Ω. On retrouve ici l'idée que, pour calculer l'intégrale d'une fonction f, il "suffit" de faire la différence des valeurs de F aux extrémités du chemin. En particulier, la valeur de l'intégrale ne dépend que de ces extrémités. Autrement dit, si $\tilde{\gamma}$ est un autre chemin dans Ω avec les mêmes extrémités que γ, alors les intégrales de f le long de $\tilde{\gamma}$ et le long de γ sont égales.*
Lorsque γ est fermé, l'intégrale dans (1.23) est nulle. On n'a donc pas besoin de connaître explicitement F.

S **Démonstration.** Si $a = b$, (1.23) est vraie. On traite maintenant le cas où γ est C^1 avec $a < b$. D'après le 3 de la proposition 1.25, la fonction $[a; b] \ni t \mapsto F(\gamma(t))$ est dérivable de dérivée $[a; b] \ni t \mapsto F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. D'après (1.11) et le fait que $F' = f$, on a donc

$$F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) \;=\; \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

d'après (1.14).
Passons au cas où γ est seulement C^1 par morceaux avec $a < b$. Soit γ_1, ..., γ_n la famille de chemins C^1 donnée par le 2 de la proposition 1.17. Pour $1 \leq j \leq n$, $\gamma_j : [t_{j-1}; t_j] \longrightarrow \Omega$ et on a $a = t_0$ et $b = t_n$. En utilisant la définition de l'intégrale de f le long de γ et l'argument précédent pour chaque chemin γ_j, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;&=\; \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{j=1}^n F\big(\gamma(t_j)\big) - F\big(\gamma(t_{j-1})\big) \;=\; F\big(\gamma(t_n)\big) - F\big(\gamma(t_0)\big)\\ &=\; F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\,.\end{aligned}$$

□

Exemple 1.11. *Reprenons l'exemple 1.7 (voir aussi l'exemple 1.10). Comme*

$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \;\neq\; \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,,$$

γ_1 et γ_2 ayant les mêmes extrêmités, la proposition 1.26 prouve qu'il n'y a pas d'ouvert contenant l'image de γ_1 et celle de γ_2 sur lequel $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $f(z) = 1/z$, admette une primitive.

Exemple 1.12. *Soit $f(z) = \bar{z}$ définie sur $\mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ un paramétrage du cercle $C(0; r)$ parcouru dans le sens trigonométrique positif. On a alors*

L

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{-it} \times ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = 2i\pi r^2 \neq 0.$$

Comme γ est fermé, on en déduit que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}$, ni même sur aucun ouvert contenant l'image de γ.

On termine ce paragraphe par une propriété importante.

S **Proposition 1.27.** *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, i.e. un ouvert non vide connexe par arcs. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe de $\mathbb{C}$-dérivée nulle alors f est constante.*

Remarque 1.16. *Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le résultat analogue repose sur le théorème des accroissements finis et n'est vrai que pour les fonctions définies sur un intervalle. L'hypothèse "intervalle" est ici remplacée par "connexe par arcs": l'ensemble de définition doit être en un seul morceau.*
On donne ci-dessous une preuve de la proposition 1.27 basée sur les intégrales le long d'un chemin. On obtiendra une autre preuve en combinant la proposition 3.3 et le théorème 3.3.

S

Démonstration. On traite d'abord le cas où Ω est étoilé.
Soit $z_0 \in \Omega$ tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0. Soit $z \in \Omega$ et $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = tz + (1-t)z_0$. On a $\gamma([0;1]) \subset \Omega$ et γ est C^1. Comme f est holomorphe, $f \circ \gamma$ est dérivable et $(f \circ \gamma)' = (f' \circ \gamma)\gamma' = 0$ (cf. proposition 1.25), puisque f' est nulle. Par (1.11), on a donc

$$f(z) - f(z_0) = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Donc f est constante égale à $f(z_0)$.
On traite maintenant le cas général. Pour ce faire, on a besoin des notions suivantes.
On appelle chemin polygonal la concaténation d'un nombre finis de chemins du type ψ : $[0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\psi(t) = tz_2 + (1-t)z_1$, pour $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$.
On remarque qu'un tel chemin est C^1 par morceaux.
On dit qu'un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ est connexe par lignes polygonales si, pour tout $(w; z) \in U^2$, il existe un chemin polygonal $\gamma : [a;b] \longrightarrow U$ tel que $\gamma(a) = w$ et $\gamma(b) = z$.
On s'appuie maintenant sur le

Lemme 1.1. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Alors U est connexe par arcs si et seulement si U est connexe par lignes polygonales.*

Démonstration. Comme un chemin polygonal est une courbe paramétrée continue, on voit que la connexité par lignes polygonales implique la connexité par arcs. La réciproque sera démontrée en TD. $\square$

On reprend la preuve de la proposition 1.27. Soit $z_0 \in \Omega$ fixé. Soit $z \in \Omega$. Comme Ω est connexe par arcs, il est aussi connexe par lignes polygonales, d'après le lemme 1.1. Il existe donc $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ un chemin polygonal tel que $\gamma(a) = z_0$ et $\gamma(b) = z$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1; \cdots; z_n) \in \Omega^n$ et des chemins C^1 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ tels que $z_1 = z_0$, $z_n = z$, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $\psi_k : [0;1] \ni t \mapsto tz_{k+1} + (1-t)z_k$ et γ est la concaténation des chemins $\psi_1, \cdots, \psi_n$. En appliquant l'argument du début de la preuve, on montre successivement $f(z_0) = f(z_1) = f(z_2)$, $f(z_k) = f(z_{k+1})$, pour $2 \leq k \leq n-1$. D'où $f(z_0) = f(z_n) = f(z)$. Ceci étant valable pour tout $z \in \Omega$, f est constante sur Ω. $\square$

1.3.2 $\mathbb{C}$-dérivabilité et différentiabilité.

On a vu plus haut que les notions de $\mathbb{C}$-dérivabilité et de différentiabilité ne sont pas identiques. Il y a cependant un lien entre les deux, comme on va le voir maintenant.

S

Proposition 1.28. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe (ou $\mathbb{C}$-dérivable) en z_0 si et seulement si f est différentiable en z_0 <u>et</u> sa* *différentielle $Df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Lorsque f est différentiable en z_0, le fait que $Df(z_0)$ soit $\mathbb{C}$-linéaire est équivalent à, en posant $z_0 = (x_0; y_0)$,*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{1.24}$$

Ces deux égalités s'appellent les conditions de Cauchy-Riemann en z_0. Lorsque la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, $Df(z_0)$ est la multiplication par $f'(z_0)$,

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{1.25}$$

et la matrice de $Df(z_0)$ dans la base canonique $(1; i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ vérifie

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0; y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0; y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0; y_0) & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0; y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial P}{\partial x}(x_0; y_0) \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Démonstration. On a vu que f est holomorphe en z_0 si et seulement si (1.22) est valide pour un certain $\ell \in \mathbb{C}$. D'après (1.4) dans la définition 1.20, f est holomorphe en z_0 si et seulement si f est différentiable en z_0 et $Df(z_0)$ est la multiplication par ℓ. Par la proposition 1.1, on en déduit que f est holomorphe en z_0 si et seulement si f est différentiable en z_0 et $Df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
Dans le cas où f est holomorphe en z_0, sa différentielle en z_0 est la multiplication par $f'(z_0)$ sur $\mathbb{C}$ donc, par la proposition 1.1, on en déduit (1.25) et (1.26). □

Remarque 1.17. *Retour sur des exemples et contre-exemples simples précédents (voir la remarque 1.14 et l'exemple 1.9).*
D'après l'exemple 1.4, on voit que $z \mapsto z$ est holomorphe puisqu'elle est différentiable et la matrice de sa différentielle dans la base canonique a la forme adéquate, d'après la proposition 1.28. Il en est de même de toute fonction constante. Toujours grâce à l'exemple 1.4, on retrouve le fait que la conjugaison complexe, la fonction partie réelle et la fonction partie imaginaire sont nulle part holomorphes puisque la matrice dans la base canonique de leur différentielle n'a pas la forme adéquate.
Quant à la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(z) = |z|^2$, elle est partout différentiable et la matrice de $Df(z)$ est

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 1.28, f n'est holomorphe qu'en $z = 0$.

Pour repérer les fonctions holomorphes sur un ouvert, le résultat suivant sera utile.

Proposition 1.29. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors f est C^1_h sur Ω si et seulement si les applications composantes P et Q sont de classe C^1 (comme fonctions réelles de deux variables réelles) sur Ω et les conditions (1.24) de Cauchy-Riemann sont remplies en tout point $(x_0; y_0)$ de Ω.*

Remarque 1.18. *On verra plus loin que "f est C^1_h sur Ω" est équivalent à "f holomorphe sur Ω". Pour l'instant, on sait seulement que la première propriété implique la seconde.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que, si $w \in \mathbb{C}$ et L_w est la multiplication sur $\mathbb{C}$ par w, alors la norme d'opérateur $\|L_w\|_{op}$ de L_w (cf. (1.6)) vérifie $\|L_w\|_{op} = |w|$. $(*)$.
Supposons f de classe C^1_h sur Ω. Elle est donc holomorphe sur Ω. D'après la proposition 1.28, elle est différentiable sur Ω et sa différentielle est l'application $Df : \Omega \ni z \mapsto L_{f'(z)} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Pour $(z_0; z) \in \Omega^2$, on a, d'après $(*)$,

S

$$\|Df(z) - Df(z_0)\|_{op} \;=\; \|L_{f'(z)} - L_{f'(z_0)}\|_{op} \;=\; \|L_{f'(z)-f'(z_0)}\|_{op} \;=\; |f'(z) - f'(z_0)|\,. \tag{1.27}$$

Comme f' est continue par hypothèse, Df est aussi continue. En particulier, les dérivées partielles premières de P et Q existent et sont continues sur Ω (cf. L2). Enfin, par la proposition 1.28, (1.24) est valable en tout point $(x_0; y_0)$ de Ω.
Réciproquement, supposons que P et Q sont C^1 sur Ω et que (1.24) est valable en tout point $(x_0; y_0)$ de Ω. Par le cours de L2, f est différentiable et sa différentielle est continue sur Ω. Puisque (1.24) est valable sur Ω, f est holomorphe en tout point de Ω, par la proposition 1.28. En particulier, pour tout $z \in \Omega$, $Df(z)$ est la multiplication par $f'(z)$ et on a (1.27). La continuité de Df et (1.27) donne la continuité de f'. $\square$

On introduit quelques notations.

Définition 1.33. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable en z_0. Les vecteurs colonnes de la matrice* (1.5) *(ou* (1.26)*) sont notés*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,,$$

respectivement. On pose aussi

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \;:=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \,-\, i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \;:=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \,+\, i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Cela permet de réexprimer les résultats de la proposition 1.28 de la façon suivante :
Si f est holomorphe en z_0 alors

L

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \;=\; -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \;=\; f'(z_0)\,, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \;=\; f'(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \;=\; 0\,.$$

On suppose que f est différentiable en z_0. Si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \;=\; -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \;=\; 0\,,$$

alors f est holomorphe en z_0 et

$$f'(z_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,.$$

S

Remarque 1.19. *Les conditions de Cauchy-Riemann peuvent paraitre anodines au premier abord mais ont en fait de grosses conséquences. Si une fonction f est holomorphe alors il y a un lien très fort entre ses parties réelle et imaginaire (c'est ce que disent les conditions de Cauchy-Riemann). On peut par exemple montrer (voir TD) que si une fonction holomorphe sur un domaine Ω est à valeurs réelles (sa partie imaginaire est donc constante égale à zéro) alors cette fonction est constante.*