S : fait en salle | L : à lire. | TD: voir en td.

CHAPITRE 3

FONCTIONS ANALYTIQUES.

S

Dans ce chapitre, on introduit la notion de fonction analytique et on dégage un certain nombre de propriétés des fonctions analytiques. On montre, en particulier, qu'une fonction analytique est holomorphe et même de classe C_h^∞ et qu'une fonction holomorphe de classe C_h^1 est analytique. On verra au chapitre 4 qu'une fonction holomorphe est aussi analytique. Ces propriétés des fonctions analytiques sont vraiment étonnantes lorsqu'on les compare à celles des fonctions réelles d'une variable réelle de classe C^∞.

3.1 Séries entières et fonctions analytiques.

Définition 3.1. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est développable en série entière en z_0, noté* DSE *en z_0, s'il existe une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0; R[$ tels que, pour tout $z \in D(z_0; r[$,*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \,.$$

La proposition suivante suit directement de ce qu'on a vu sur les séries entières (Section 2.1).

Proposition 3.1. *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est* DSE *en z_0 alors il existe $r > 0$ tel que f est C_h^∞ sur $D(z_0; r[$ et pour tout $z \in D(z_0; r[$ on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \,. \tag{3.1}$$

En particulier, s'il existe, le DSE en z_0 est unique.

Exemple 3.1. *Une fonction polynomiale P est DSE en tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et si $n = \deg(P)$ alors*

$$P(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \,.$$

S

Exemple 3.2. *La fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = 1/(1-z)$ est* DSE *en $z_0 = 0$. En effet, pour tout $z \in D(0;1[$, on a (cf. séries géométriques)*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n \,.$$

Exemple 3.3. *On a vu à la fin du chapitre précédent (cf. proposition 2.13), que la fonction* Log *(logarithme principal) est DSE en $z_0 = 1$.*

Exemple 3.4. *Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = 1/z$. Est-elle DSE ? Si oui, en quel z_0 ? Étant donné $z_0 \neq 0$, on va donc naturellement chercher à faire apparaitre $z - z_0$.*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z - z_0 + z_0} \;=\; \frac{1}{z_0} \times \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}} \,.$$

Si $|z - z_0|/|z_0| < 1$, i.e. si $z \in D(z_0; |z_0|[$, on a alors

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z_0} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n .$$

La fonction f est donc DSE en n'importe quel $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Définition 3.2. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est* analytique *sur Ω si, pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction f est* DSE *en z_0. En particulier, f est holomorphe et même de classe C_h^∞ sur Ω (cf. proposition 3.1).*

Exemple 3.5. *L'exemple 3.4 montre que la fonction $f(z) = 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.*

Le proposition qui suit découle directement de ce qu'on a fait sur les séries entières (cf. propositions 2.4 et 2.6 et corollaire 2.2).

Proposition 3.2. *Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytiques et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont analytiques sur Ω. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est analytique.*

Les fonctions polynômiales sont évidemment analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier. On montrera dans la Section 3.3 qu'en fait toutes les fonctions de classe C_h^1 sont analytiques sur leur ensemble de définition. Mieux, on prouvera que c'est le cas pour toutes les fonctions holomorphes (voir le chapitre 4).

Pour les fonctions réelles d'une variable réelle, la situation est différente. On peut montrer, par exemple, que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$, si $x \neq 0$, et par $f(0) = 0$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant f n'est pas nulle. Donc la formule (3.1), avec $z_0 = 0$ et la variable z remplacée par une variable réelle, est fausse pour cette fonction.

S

Exercice 3.1. *Montrer que la fonction exponentielle est analytique. Indication : comme dans l'exemple 3.4, pour $z_0 \in \mathbb{C}$, écrire $z = z_0 + (z - z_0)$.*

3.2 Zéros isolés et prolongement analytique

Le fait qu'une fonction soit analytique a des conséquences importantes (en plus du côté infiniment $\mathbb{C}$-dérivable). Pouvoir développer en série entière permet d'avoir des informations dans tout un disque (le disque de convergence de la série entière) à partir seulement d'informations au voisinage d'un point z_0.

Proposition 3.3. *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique.*

$\boxed{S}$

1. *S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ alors f est nulle.*
2. *S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ alors f est constante.*
3. *S'il existe $z_0 \in \Omega$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in (\mathbb{N} \cap]N; +\infty[)$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ alors f est une fonction polynôme de degré au plus N.*

Remarque 3.1. *Commentaires.*

1. *Si f est la somme, sur $\Omega = D(z_0; R[$, d'une série entière centrée en z_0, les résultats de la proposition 3.3 sont immédiats. L'intérêt de cette proposition réside dans le fait que les hypothèses, qui sont "locales" (ne dépendent que de ce qui se passe sur un disque centré en z_0), impliquent une propriété globale (valable sur tout Ω).*

$\boxed{L}$

2. *L'hypothèse "Ω est connexe par arcs" est essentielle. Par exemple, si l'on considère l'ouvert $\Omega = D(0; 1[\cup D(3i; 1[$ et si l'on prend la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 0$, pour $z \in D(0; 1[$, et par $f(z) = 1$, pour $z \in D(3i; 1[$, alors f est bien analytique mais le résultat 1 de la proposition est faux pour $z_0 = 0$.*

Démonstration. Montrons d'abord que le résultat 1 implique les deux autres. On remarque que le résultat 2 est un cas particulier du résultat 3. On vérifie donc : 1 $\Longrightarrow$ 3.
Supposons que, pour un $z_0 \in \Omega$, pour un $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N$, $f^{(n)}(z_0) = 0$.
Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$\boxed{S}$

$$g(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Comme différence de fonctions analytiques, g est analytique. De plus, pour $z \in \Omega$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} g^{(p)}(z) &= f^{(p)}(z) - \sum_{n=p}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{n!}{(n-p)!} (z - z_0)^{n-p} \quad \text{si} \quad p \leq N , \\ &= f^{(p)}(z) \quad \text{si} \quad p > N . \end{aligned}$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $g^{(p)}(z_0) = 0$. On a aussi $g(z_0) = 0$. On peut donc appliquer le 1 à g, ce qui montre que g est nulle. Par la définition de g, f est bien une fonction polynôme de degré au plus N.
On montre maintenant 1.
Soit $\mathcal{N} := \{z \in \Omega \,;\, \forall n \in \mathbb{N} ,\, f^{(n)}(z) = 0\}$. Par hypothèse, $z_0 \in \mathcal{N}$. On vérifie d'abord les deux propriétés suivantes : a). $\mathcal{N}$ est un ouvert ; b). Si $(z_k)_k$ est une suite d'éléments de $\mathcal{N}$ convergeant vers un $z \in \Omega$ alors $z \in \mathcal{N}$. On dit que $\mathcal{N}$ est un <u>fermé de Ω</u>.

a). Comme $\mathcal{N}$ est non vide, on prend un $z_1 \in \mathcal{N}$. Comme f est analytique, il existe $r > 0$ tel que
$$\forall\, z \in D(z_1; r[, \quad f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}\,(z - z_1)^n\,.$$
Comme $z_1 \in \mathcal{N}$, f est nulle sur $D(z_1; r[$. En particulier, toutes ses $\mathbb{C}$-dérivées sont nulles sur $D(z_1; r[$ donc $D(z_1; r[\subset \mathcal{N}$. On a montré que $\mathcal{N}$ est ouvert.

b). Soit $(z_k)_k \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{N}$ qui converge vers un certain $z \in \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est continue sur Ω donc $f^{(n)}(z)$ est la limite de la suite $(f^{(n)}(z_k))_k$ et comme, pour tout k, $z_k \in \mathcal{N}$, $f^{(n)}(z_k) = 0$, $f^{(n)}(z)$ est la limite de la suite nulle donc $f^{(n)}(z) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathcal{N}$. On a montré que $\mathcal{N}$ est fermé dans Ω.

On va montrer que $\mathcal{N} = \Omega$, ce qui prouvera que $f(z) = 0$, pour tout $z \in \Omega$. Par définition, $\mathcal{N} \subset \Omega$. Il reste donc à montrer que $\Omega \subset \mathcal{N}$.
Soit $z_1 \in \Omega$. Comme Ω est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Soit $J := \{t \in [0; 1]; \gamma(t) \in \mathcal{N}\}$. Comme $\gamma(0) = z_0 \in \mathcal{N}$, $0 \in J$ et J est non vide. Soit $T = \sup J$. Comme $J \subset [0; 1]$, $T \in [0; 1]$. De plus, il existe $(t_k)_k \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $t_k \to T$. Pour tout k, $t_k \in J$ donc $\gamma(t_k) \in \mathcal{N}$. Comme γ est continue sur $[0; 1]$, la suite $(\gamma(t_k))_k$ tend vers $\gamma(T) \in \Omega$. D'après la propriété b) (avec $z_k = \gamma(t_k)$, pour tout k), $z := \gamma(T) \in \mathcal{N}$ et $T \in J$.
Supposons $T < 1$. Comme $\mathcal{N}$ est un ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(z; \epsilon[\subset \mathcal{N}$. Comme γ est continue en T, il existe $\delta > 0$ tel que $\gamma(]T - \delta; T + \delta[) \subset D(z; \epsilon[$. Comme $T < 1$, il existe $s \in (]T; T + \delta[\cap [0; 1])$ et on a $\gamma(s) \in D(z; \epsilon[\subset \mathcal{N}$. Donc $s \in J$. Contradiction car $s > T$ et $T = \sup J$.
Donc $T = 1$ et $z_1 = \gamma(1) = \gamma(T) \in \mathcal{N}$. On a montré que $\Omega \subset \mathcal{N}$. □

Remarque 3.2. *Ce qu'on a montré ci-dessus est qu'en fait, si Ω est connexe par arcs, alors un sous-ensemble non-vide de Ω (ici $\mathcal{N}$), qui est à la fois ouvert et fermé dans Ω, est égal à Ω. Un ensemble qui vérifie cette propriété est dit connexe. On a donc montré que, si Ω est connexe par arcs, alors Ω est connexe. Dans la plupart des livres, on trouve en fait comme définition d'un domaine que c'est un ouvert connexe. On peut en fait montrer que, pour les* <u>ouverts</u> *de $\mathbb{C}$, les deux notions de connexe et de connexe par arcs coïncident. La notion d'ensemble connexe par arcs est plus intuitive que celle de connexe, c'est pour ça qu'on l'a choisie dans la définition d'un domaine.*

Théorème 3.1 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique* <u>*non-nulle*</u>*. Soit $Z(f) := \{z \in \Omega\,;\, f(z) = 0\}$ l'ensemble des zéros (ou points d'annulation) de f. Soit $z_0 \in Z(f)$. Soit R le rayon de convergence du* DSE *de f en z_0.*

1. *L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\,;\, f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ est non vide.*
   Soit n_0 le minimum de cet ensemble.
2. *Il existe une fonction $g : D(z_0; R[\longrightarrow \mathbb{C}$, somme d'une série entière, telle que $g(z_0) \neq 0$ et, pour tout $z \in D(z_0; R[$, $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$.*
3. *Il existe $r \in]0; R]$ tel que g ne s'annule pas sur $D(z_0; r[$. En particulier, f ne s'annule pas sur $D(z_0; r[\backslash\{z_0\}$ donc z_0 est un point isolé de $Z(f)$.*

Les points de $Z(f)$ étant tous isolés, $Z(f)$ est un ensemble discret.

S

S

Démonstration. Soit f analytique non nulle et $z_0 \in Z(f)$. Si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\,;\ f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ était vide alors, d'après la proposition 3.3, f serait nulle. Contradiction.
Par définition de n_0, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n < n_0$, $f^{(n)}(z_0) = 0$. Sur $D(z_0; R[$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 (cf. (3.1)) donc, pour $z \in D(z_0; R[$, on a

$$f(z) \;=\; \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \;=\; (z-z_0)^{n_0}\left[\frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-n_0}\right]. \quad (3.2)$$

S

Soit $g : D(z_0; R[\longrightarrow \mathbb{C}$ l'application qui, à $z \in D(z_0; R[$ associe le terme entre crochets dans (3.2). Comme somme d'une série entière sur $D(z_0; R[$, g est continue et, en particulier, g tend, lorsque $z \to z_0$, vers $g(z_0) = f^{(n_0)}(z_0)/(n_0!) \neq 0$. De plus, par (3.2), on a, sur $D(z_0; R[$, $f(z) = (z-z_0)^{n_0} g(z)$.
Comme $g(z_0) \neq 0$ et g est continue en z_0, il existe $r \in]0; R]$ tel que, pour tout $z \in D(z_0; r[$, $g(z) \in D(g(z_0); |g(z_0)|/2[$. Pour $z \in D(z_0; r[$,

$$|g(z_0)| \;\leq\; |g(z_0) - g(z)| + |g(z)| \;<\; |g(z_0)|/2 + |g(z)|$$

donc $|g(z)| > |g(z_0)|/2 > 0$. Donc g ne s'annule pas sur $D(z_0; r[$. En utilisant (3.2), on en déduit que f ne s'annule pas sur $D(z_0; r[\setminus\{z_0\}$. □

Pour certaines fonctions non nulles $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞, le résultat du théorème 3.1 est faux. On peut construire une telle fonction de sorte qu'elle soit nulle sur l'intervalle $[0; 1]$, par exemple.

Corollaire 3.1. *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique.*

1. *On suppose f non nulle. Pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$, la fonction f admet un nombre fini (éventuellement nul) de zéros dans K. Par conséquent, l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est au plus dénombrable.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'image réciproque $f^{-1}(\alpha) = \{z \in \Omega\,;\ f(z) = \alpha\}$ de $\{\alpha\}$ par f est soit discret soit égal à Ω.*
3. *Si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est analytique et si l'ensemble $A = \{z \in \Omega\,;\ f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$.*

Démonstration.

1. Supposons que $Z(f) \cap K$ soit infini. Il existe donc une suite injective $(z_k)_k$ d'éléments de $Z(f) \cap K$. Comme K est compact, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(k)})_k$ tendant vers un $\ell \in K$. Comme f est continue sur K, $f(\ell) = \lim f(z_{\varphi(k)}) = 0$, puisque $z_{\varphi(k)} \in Z(f)$, pour tout k. Donc $\ell \in Z(f)$. Comme la suite $(z_{\varphi(k)})_k$ est injective, elle prend au plus une fois la valeur ℓ. En retirant éventuellement cette valeur de la suite, on a une suite $(z_{\psi(k)})_k$ d'éléments de $Z(f) \setminus \{\ell\}$ tendant vers ℓ. Donc $\ell \in \overline{Z(f) \setminus \{\ell\}}$ et, par le corollaire 1.1, ℓ est un point d'accumulation de $Z(f)$, ce qui contredit le théorème 3.1. Donc $Z(f) \cap K$ est fini.
   Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D(0; p]$ est compact, et comme

   $$Z(f) \;=\; \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(Z(f) \cap D(0; p]\right),$$

   $Z(f)$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis (d'après ce qui précède) donc est au plus dénombrable.

2. Comme différence de fonctions analytiques, la fonction $f - \alpha$ est analytique et on a $Z(f - \alpha) = f^{-1}(\alpha)$. Supposons $f^{-1}(\alpha) \neq \Omega$. Alors $f - \alpha$ est non nulle et, par le théorème 3.1, $Z(f - \alpha) = f^{-1}(\alpha)$ est discret.
3. Comme différence de fonctions analytiques, la fonction $f - g$ est analytique et on a $Z(f-g) = A$. Soit $a \in \Omega$ un point d'accumulation de A. Il existe donc une suite $(z_k)_k$ d'éléments de A tendant vers a (cf. corollaire 1.1). Comme $f-g$ est continue et $a \in \Omega$, $(f-g)(a) = \lim(f-g)(z_k) = 0$, puisque $z_k \in A$, pour tout k. Donc $a \in Z(f-g) = A$. Si $f-g$ était non nulle alors, par le théorème 3.1, A serait discret. Contradiction avec le fait que $a \in A$ est un point d'accumulation de A. Donc $f = g$. □

Théorème 3.2 (Principe du prolongement analytique). *Soit Ω un domaine, soit Ω_0 un ouvert non-vide inclus dans Ω et $f : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors la fonction f admet au plus un prolongement à Ω qui est analytique sur Ω, i.e. si $f_1, f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sont analytiques et telles que, pour tout $z \in \Omega_0$, $f_1(z) = f_2(z) = f(z)$, alors $f_1 = f_2$.*

Démonstration. Soit f_1, f_2 deux prolongements analytiques de f à Ω. Alors l'ensemble $A = \{z \in \Omega\,;\, f_1(z) = f_2(z)\}$ contient Ω_0. Soit $a \in \Omega_0$. Comme Ω_0 est un ouvert, a est un point d'accumulation de Ω_0 (cf. remarque 1.3) et donc aussi de A. Par le corollaire 3.1, $f_1 = f_2$. □

Remarque 3.3. *Attention, le théorème 3.2 ne dit pas que f admet un prolongement analytique à Ω mais que, s'il y en a un, il est unique.*

Remarque 3.4. *Dans le cadre du théorème 3.1, on a une factorisation de f sur $D(z_0; R[$ (cf. le point 2). On verra par la suite qu'elle est en fait valable sur Ω. Par analogie avec les polynômes, on a la définition suivante.*

Définition 3.3. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ non nulle et $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ est appelé l'ordre de z_0.*

3.3 Formule de Cauchy et analyticité des fonctions C^1_h.

L'objectif de cette partie est de montrer qu'une fonction C^1_h sur un ouvert non vide est nécessairement analytique sur cet ouvert. Ce n'est qu'au chapitre 4 que l'on prouvera qu'il en est de même pour les fonctions holomorphes.

Donnons tout d'abord une idée de la stratégie que l'on va suivre. Considérons la preuve de la proposition 2.9, qui partant de la somme f d'une série entière établit la *formule de Cauchy* sur un cercle (2.14) :

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\,, \quad f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0 + re^{it}\big)}{z_0 + re^{it} - z}\, e^{it}\,\mathrm{d}t\,.$$

Cette formule a un sens dès que f est continue sur un ouvert contenant $D(z_0; r]$ mais peut être fausse. Supposons qu'elle soit vraie pour une telle fonction. On voit que l'on peut reprendre la preuve de cette proposition 2.9 en sens inverse (la justification de la permutation de l'intégrale et de la série étant encore valable car la fonction continue f est bornée sur le

cercle $C(z_0;r)$) pour aboutir à un DSE de f en z_0.
Si la fonction f n'est pas holomorphe sur $D(z_0;r[$, la formule de Cauchy précédente ne peut être valable pour elle car sinon elle serait égale sur ce disque à la somme d'une série entière, qui, elle, est forcément holomorphe.
On va voir ici que cette stratégie fonctionne pour f de classe C^1_h, c'est-à-dire holomorphe de $\mathbb{C}$-dérivée continue, sur un ouvert non vide. On commence donc par établir la formule de Cauchy sur des cercles pour de telles fonctions.

$\boxed{\text{S}}$ **Proposition 3.4.** *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1_h. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $R > 0$ tel que $D(z_0;R[\subset \Omega$. Soit $r \in]0;R[$ et $\gamma_{z_0;r} : [0;2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$, qui est un lacet C^1 d'image $C(z_0;r)$ (cf. corollaire 2.4). Alors*

$$\forall\, z \in D(z_0;r[\,, \quad f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0+re^{it}\big)}{z_0+re^{it}-z}\,e^{it}\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.3}$$

Si $z \in D(z_0;R[$ mais $z \notin D(z_0,r]$ alors

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; 0\,. \tag{3.4}$$

Démonstration. Pour simplifier, on pose $\gamma := \gamma_{z_0;r}$. D'après le corollaire 2.4, γ est un lacet C^1 d'image $C(z_0;r) \subset D(z_0;R[\subset \Omega$. Pour $z \in D(z_0;r[$, on pose

$$a \;:=\; \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;-\; f(z)\,.$$

D'après (2.15) et la proposition 1.21, on a

$$a \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,.$$

Soit $w \in C(z_0;r)$. Comme f est C^1_h, la fonction $[0;1] \ni s \mapsto f(sw+(1-s)z)$ est C^1 de dérivée $[0;1] \ni s \mapsto f'(sw+(1-s)z)(w-z)$ (cf. proposition 1.27) donc

$$f(w) \;-\; f(z) \;=\; (w-z)\int_0^1 f'\big(sw+(1-s)z\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

D'où

$$2i\pi a \;=\; \int_\gamma \int_0^1 f'\big(sw+(1-s)z\big)\,\mathrm{d}s\;\mathrm{d}w \;=\; \int_0^{2\pi} \gamma'(t)\int_0^1 f'\big(s\gamma(t)+(1-s)z\big)\,\mathrm{d}s\;\mathrm{d}t\,.$$

D'après le théorème de Fubini pour les intégrales doubles,

$$2i\pi a \;=\; \int_0^1 \int_0^{2\pi} \gamma'(t)\,f'\big(s\gamma(t)+(1-s)z\big)\,\mathrm{d}t\;\mathrm{d}s$$

et, d'après les propriétés des intégrales à paramètre,

$$[0;1] \ni s \;\mapsto\; \int_0^{2\pi} \gamma'(t)\,f'\big(s\gamma(t)+(1-s)z\big)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_\gamma f'\big(sw+(1-s)z\big)\,\mathrm{d}w$$

S

est continue car f' l'est. Donc

$$2i\pi a \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \int_\gamma f'\big(sw+(1-s)z\big)\,\mathrm{d}w\ \mathrm{d}s\,.$$

Comme, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $s\in[\varepsilon;1]$, la fonction $D(z_0;R[\ni w\mapsto f(sw+(1-s)z)/s$ est une primitive (holomorphe) de $D(z_0;R[\ni w\mapsto f'(sw+(1-s)z)$ et comme γ est fermé à valeurs dans $D(z_0;R[$, on obtient, d'après la proposition 1.28,

$$2i\pi a \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 0\ \mathrm{d}s \;=\; 0\,.$$

D'après la définition de a, on obtient (3.3).
Soit $z\in(D(z_0;R[\backslash D(z_0,r])$ et

$$a \;:=\; \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\ .$$

D'après (2.16) et la proposition 1.21, on a

$$a \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,.$$

En reprenant à l'identique l'argument précédent, on obtient $a=0$ soit (3.4). □

Corollaire 3.2. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction de classe C^1_h. Soit $z_0\in\Omega$ et*

$$R_0 \;:=\; \sup\big\{R>0\,;\ D(z_0;R[\subset\Omega\big\}\,.$$

Avec la convention $D(z_0;R_0[=\mathbb{C}$ si $R_0=+\infty$, on a $D(z_0;R_0[\subset\Omega$, la formule de Cauchy (3.3) est valable pour tout $r\in]0;R_0[$ et f est DSE *en z_0, le développement étant valable sur $D(z_0;R_0[$. Le rayon de convergence du* DSE *est donc $\geq R_0$.*
En particulier, f est analytique sur Ω.

Démonstration. Soit $\mathcal{R}:=\{R>0\,;\ D(z_0;R[\subset\Omega\}$. Il est non vide car Ω est ouvert.
Cas où $R_0=+\infty$. Soit $z\in\mathbb{C}$. Puisque $\sup\mathcal{R}=+\infty$, il existe un $R\in\mathcal{R}$ tel que $R>|z_0|+|z|$. On a donc $|z-z_0|\leq|z_0|+|z|<R$ donc $z\in D(z_0;R[\subset\Omega$. Donc Ω contient tout élément de $\mathbb{C}$, d'où $\Omega=\mathbb{C}=D(z_0;R_0[$, d'après la convention.
Cas où $R_0<+\infty$. Soit $z\in D(z_0;R_0[$. On a donc $|z-z_0|<R_0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $R\in\mathcal{R}$ tel que $|z-z_0|<R\leq R_0$. Comme $z\in D(z_0;R[$ et $R\in\mathcal{R}$, $z\in\Omega$. D'où $D(z_0;R_0[\subset\Omega$ c'est-à-dire $R_0\in\mathcal{R}$.
Dans les deux cas, on a montré que $D(z_0;R_0[\subset\Omega$.
Soit $r\in]0;R_0[$. Par la proposition 3.4, on a la formule de Cauchy (3.3). On suit la preuve de la proposition 2.9 à l'envers, ce qui est possible car, comme f est continue sur le compact $C(z_0;r)$, elle y est bornée donc la majoration (2.18) est valable et la série de fonctions considérée converge normalement sur $C(z_0;r)$. On obtient donc (2.17), c'est-à-dire un DSE de f en z_0 sur $D(z_0;r[$ tel que, pour tout n, le coefficient a_n est donné par une intégrale dépendant a priori de r. Mais il n'en est rien, car, sur $D(z_0;r[$, f est la somme d'une série entière donc est C^∞_h et, pour tout n, $a_n=f^{(n)}(z_0)/(n!)$ (cf. (2.11)). De plus, par le corollaire 2.1, le rayon de convergence de ce DSE est $\geq r$, pour tous les $r\in]0;R_0[$, donc il est

$\geq \sup\,]0; R_0[= R_0$. En particulier, ce DSE est valable sur $D(z_0; R_0[$.
Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \Omega$, on a montré que f est analytique sur Ω. $\square$

En reprenant les résultats sur les séries entières (cf. corollaire 2.2 et proposition 2.8) et en utilisant la proposition 3.4 et le corollaire 3.2, on obtient le

Théorème 3.3. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1_h sur Ω. Alors f est analytique (donc C^∞_h) sur Ω. De plus, pour tout $z_0 \in \Omega$, on a, en définissant $R_0 := \sup\{R > 0; D(z_0; R[\subset \Omega\}$, les propriétés suivantes :*

1. *Le DSE $\sum a_n(z - z_0)^n$ de f en z_0 a un rayon de convergence $\geq R_0$ donc, pour tout $z \in D(z_0; R_0[$,*
$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z\,-\,z_0)^n\,.$$
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*
$$\forall\, r \in]0; R_0[\,, \quad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,,$$
où $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \longrightarrow \Omega$ est le lacet C^1 d'image $C(z_0; r)$ défini par $\gamma_{z_0;r} = z_0 + re^{it}$. En particulier, l'intégrale précédente ne dépend pas de r.
3. *Pour tout $r \in]0; R_0[$, on a la formule de Cauchy sur le cercle $C(z_0; r)$:*
$$\forall\, z \in D(z_0; r[\,, \quad f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$
et la propriété
$$\forall\, z \in \big(D(z_0; R_0[\setminus D(z_0; r]\big)\,, \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; 0\,.$$

On utilise la convention selon laquelle, pour $R_0 = +\infty$, $D(z_0; R_0[= \mathbb{C}$.

Exemple 3.6. *La fonction $f(z) = 1/z$ est de classe C^1_h sur $\mathbb{C}^*$. Par le théorème 3.3, elle est analytique sur $\mathbb{C}^*$. Dans l'exemple 3.4, on avait déjà prouvé l'analyticité f. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, on avait obtenu explicitement le* DSE *de f en z_0 et vu que son rayon de convergence est $|z_0|$. Ceci est cohérent avec le théorème 3.3 puisque le disque $D(z_0; |z_0|[$ est le plus grand disque centré en z_0 et inclus dans $\mathbb{C}^*$.*

Remarque 3.5. *Grâce à ce théorème 3.3, on peut maintenant appliquer les résultats sur les fonctions analytiques aux fonctions dont on sait seulement qu'elles sont C^1_h.*

On est en mesure maintenant de donner une nouvelle preuve du résultat qui établit que, si une fonction holomorphe a une $\mathbb{C}$-dérivée nulle sur un ouvert connexe par arcs, alors cette fonction est constante.

Démonstration de la proposition 1.29. Comme f' est nulle sur Ω, f' y est continue donc f est C^1_h sur Ω. Par le théorème 3.3, f est analytique et C^∞_h sur Ω. Comme f' est nulle sur Ω, $f^{(n)}$ est aussi nulle sur Ω, pour $n \geq 1$. Comme Ω est un domaine, f est constante, d'après la proposition 3.3. $\square$

On a montré dans la Section 3.1 (cf. proposition 3.2) que la somme et le produit de fonctions analytiques étaient analytiques. On n'a cependant pas parlé du quotient ni de la composée. Cela reste bien entendu vrai mais la preuve directement basée sur la définition de fonction analytique n'est pas facile à écrire. Avec le théorème 3.3, on en a une immédiate.

Proposition 3.5. *Quotient et composition.*

1. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytiques sur Ω telles que g ne s'annule pas. Alors f/g est analytique sur Ω.*
2. *Soit Ω_f et Ω_g deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique telle que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$ et $g : \Omega_g \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. Alors $g \circ f$ est analytique sur Ω_f.*

Démonstration. Dans les deux cas, on sait que f et g sont C^1_h (cf. proposition 3.1). Par la proposition 1.27, f/g et $g \circ f$ sont C^1_h, suivant les cas. Par le théorème 3.3, elles sont aussi analytiques. $\square$

3.4 Théorème de Liouville et principe du maximum.

On termine ce chapitre avec deux résultats importants sur les fonctions de classe C^1_h, le Théorème de Liouville et le principe du maximum. Comme on montrera que les fonctions holomorphes sont C^1_h (cf. chapitre 4), ces résultats pourront être appliqués à des fonctions dont on sait seulement qu'elles sont holomorphes.

S

3.4.1 Théorème de Liouville.

Théorème 3.4 (Liouville)**.** *Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1_h et bornée alors f est constante.*

Remarque 3.6. *Ce résultat est faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si on suppose qu'elles sont la somme d'une série entière d'une variable réelle. Par exemple, la fonction* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la somme d'une série entière et est bornée mais n'est pas constante.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$. Comme f est C^1_h sur $\mathbb{C}$, on applique le théorème 3.3, qui montre que f est C^∞_h sur $\mathbb{C}$ et, pour tout $r > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la formule du 2 de ce théorème pour $z_0 = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{0;r}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)\, \mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}t\,.$$

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $|f|$ est majorée par M. Par (1.13), on a donc

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left|f\big(re^{it}\big)\mathrm{e}^{-int}\right| \mathrm{d}t \leq \frac{M\,(n!)}{r^n}\,.$$

Comme $n \geq 1$, le terme de droite tend vers 0, quand $r \to +\infty$, donc, passage à la limite dans les inégalités, $0 \leq |f^{(n)}(0)| \leq 0$. D'où $f^{(n)}(0) = 0$. Par la proposition 3.3, f est constante. $\square$

On donne comme application du théorème de Liouville une des nombreuses démonstrations du théorème de D'Alembert-Gauss, aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre.

$\boxed{S}$ **Théorème 3.5** (D'Alembert-Gauss)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. On raisonne par contraposition : on suppose que P ne s'annule pas et on montre qu'il est constant.
On a vu dans l'exemple 1.9 que P est C^1_h. Comme P ne s'annule pas, on y a aussi montré que la fonction $f = 1/P$ est C^1_h.
On montre que f est bornée. Le théorème de Liouville nous permettra alors de conclure.
$\boxed{L}$ Comme P est non nul, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des complexes $a_0, \ldots, a_n$, avec a_n non nul, tels que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad P(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k\,.$$

Donc, pour $z \neq 0$, on a

$$f(z) \;=\; \frac{1}{P}(z) \;=\; \frac{1}{z^n}\left(a_n \,+\, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}}\right)^{-1}$$

et on pose

$$s(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}}\,.$$

Soit $R \geq 1$ tel que $|a_{n-1}| + \cdots + |a_0| \leq R|a_n|/2$ (c'est possible car $a_n \neq 0$). Pour $|z| > R \geq 1$, on a $|z|^{-k} \leq 1$, pour $k \in \mathbb{N}$, donc

$$|s(z)| \;\leq\; \frac{|a_{n-1}| \,+\, \cdots \,+\, |a_0|}{|z|} \;\leq\; \frac{|a_n|}{2}$$

et $|a_n| \leq |a_n + s(z)| + |-s(z)| \leq |a_n + s(z)| + |a_n|/2$. D'où $|a_n + s(z)| \geq |a_n|/2$ et $|f(z)| \leq 2/|a_n|$, lorsque $|z| > R$. Comme f est continue sur $D(0; R]$, elle y est bornée par un certain $M > 0$ donc $\max\,(M; 2/|a_n|)$ majore $|f|$. Comme f est C^1_h et bornée, elle est constante par le théorème 3.4. $\square$

On a la généralisation suivante du théorème de Liouville.

Théorème 3.6. *Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1_h et s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq C|z|^m$ alors f est une fonction polynôme de degré au plus m.*

Démonstration. Voir TD. $\square$

Une conséquence de ce résultat est le résultat suivant.

$\boxed{S}$ **Théorème 3.7.** *Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1_h telle que*

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| \;=\; +\infty\,, \quad \textit{dans le sens où}$$

$$\forall\, M > 0\,, \quad \exists\, R > 0\,; \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad |z| \,>\, R \;\Longrightarrow\; |f(z)| \,>\, M\,.$$

Alors f est une fonction polynôme.

Démonstration. Voir TD. $\square$

3.4.2 Principe du maximum.

Proposition 3.6. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1_h (donc C^∞_h). Alors, pour tout $z_0 \in \Omega$, pour tout $R > 0$ tel que $D(z_0; R[\subset \Omega$ et tout $r \in]0; R[$, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \right|^2 \mathrm{d}t \,. \tag{3.5}$$

S

En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Cauchy

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \;\le\; \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in C(z_0; r)} |f(z)| \,. \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0; R[\subset \Omega$. D'après le Théorème 3.3, on a, pour tout $z \in D(z_0; R[$,

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n := f^{(n)}(z_0)/(n!)$. On prend un $r \in]0; R[$. D'après le corollaire 2.1, la série entière $\sum a_n (z - z_0)^n$ converge normalement sur le compact $C(z_0; r)$ donc la suite croissante $(s_N)_N$, définie par

$$s_N \;:=\; \sum_{n=0}^{N} \sup_{z \in C(z_0; r)} |a_n (z \,-\, z_0)|^n \,,$$

converge vers un $s \in \mathbb{R}^+$. Par la proposition 1.14, $\sum a_n (z - z_0)^n$ converge vers f, uniformément sur $C(z_0; r)$, donc la suite $(c_N)_N$, définie par

$$c_N \;:=\; \sup_{z \in C(z_0; r)} \left| f(z) \,-\, \sum_{n=0}^{N} a_n \, (z \,-\, z_0)^n \right| \,,$$

converge vers 0.

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; 2\pi]$, on pose $g(t) := f(z_0 + r e^{it})$ et

$$g_N(t) \;:=\; \sum_{n=0}^{N} a_n \, (z_0 \,+\, r e^{it} \,-\, z_0)^n \;=\; \sum_{n=0}^{N} a_n \, r^n \, e^{int} \,.$$

On a

$$|g_N(t)|^2 \,-\, |g(t)|^2 \;=\; \langle g_N(t) \,-\, g(t) \,;\, g_N(t) \rangle \,+\, \langle g(t) \,;\, g_N(t) \,-\, g(t) \rangle$$

donc

$$\left| |g_N(t)|^2 \,-\, |g(t)|^2 \right| \;\le\; \left| g_N(t) \,-\, g(t) \right| \left(|g_N(t)| \,+\, |g(t)| \right) \;\le\; c_N \left(s_N \,+\, \sup_{C(z_0; r)} |f| \right) .$$

D'où

$$\sup_{t \in [0; 2\pi]} \left| |g_N(t)|^2 \,-\, |g(t)|^2 \right| \;\le\; c_N \left(s_N \,+\, \sup_{C(z_0; r)} |f| \right) \;\le\; c_N \left(s \,+\, \sup_{C(z_0; r)} |f| \right) .$$

S

Puisque $(c_N)_N$ tend vers 0, la suite de fonctions $(|g_N|^2)_N$ converge donc vers $|g|^2$, uniformément sur $[0;2\pi]$, d'après le théorème des gendarmes. Par la proposition 1.20, l'intégrale sur $[0;2\pi]$ de $|g_N|^2$ tend vers celle de $|g|^2$, quand $N \to \infty$. Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right|^2 \,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.7}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} \overline{a_n}\,a_m\,r^{m+n}\,e^{i(m-n)t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} \overline{a_n}\,a_m\,r^{m+n}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N} \overline{a_n}\,a_n\,r^{2n}\,2\pi \;=\; \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2\,r^{2n}\,.
\end{aligned}$$

En reportant ceci dans (3.7), on voit que la série $\sum |a_n|^2\,r^{2n}$ converge et que l'on a (3.5). Cette série étant à termes positifs, chaque terme est majoré par le terme de gauche de (3.5) donc, pour tout n,

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|^2 r^{2n} \;\le\; (n!)^2 \sup_{z\in C(z_0;r)} |f(z)|^2 \;\le\; (n!)^2\left(\sup_{z\in C(z_0;r)} |f(z)|\right)^2,$$

ce qui donne (3.6). □

On en déduit l'important résultat :

Théorème 3.8 (Principe du maximum). *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C_h^1. Si $|f|$ admet un maximum local en un $z_0 \in \Omega$ alors f est constante.*

Remarque 3.7. *Encore une fois ce résultat est totalement faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si la fonction est la somme d'une série entière comme le montre l'exemple de la fonction* sin.

S

Démonstration. Supposons que $|f|$ admette un maximum local en $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $R > 0$ tel que $D(z_0;R[\subset \Omega$. Il existe alors $r' \in]0;R[$ tel que, pour tout $z \in D(z_0;r'[$, on ait $|f(z_0)| \ge |f(z)|$. Soit $r \in]0;r'[$. Comme $C(z_0;r) \subset D(z_0;r'[$, on a, pour tout $t \in [0;2\pi]$, $|f(z_0 + re^{it})| \le |f(z_0)|$ donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right|^2 \,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2\,\mathrm{d}t \;=\; |f(z_0)|^2\,.$$

Comme f est C_h^1, (3.5) est valide, par la proposition 3.6, donc

$$|f(z_0)|^2 \;\ge\; \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n} \;=\; |f(z_0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n}\,.$$

Pour tout $n \ge 1$, on a donc $f^{(n)}(z_0)\,r^n = 0$ et, comme $r > 0$, on a $f^{(n)}(z_0) = 0$. Par la proposition 3.3, f est constante. □

Définition 3.4. *Soit Ω une partie non vide de $\mathbb{C}$. On appelle bord, ou frontière, de Ω l'ensemble $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$. Si Ω est ouvert, on a $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.*

Exemple 3.7. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et $\Omega = D(z_0; R[$ alors $\partial\Omega = C(z_0; R)$ (cf. TD).*

Théorème 3.9 (Principe du maximum, version globale)**.** *Soit Ω un domaine borné. Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, qui est de classe C^1_h sur Ω. Alors f est bornée et*

$$\sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \;=\; \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \;=\; \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|\,. \tag{3.8}$$

Si, de plus, il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$ alors f est constante.

Dans le cadre du théorème 3.9, il existe $M > 0$ tel que $\Omega \subset D(0; M[$ donc $\overline{\Omega} \subset D(0; M]$. Donc $\overline{\Omega}$ est aussi bornée. Comme elle est aussi fermée, $\overline{\Omega}$ est compacte. La première égalité dans (3.8) est donc déjà établie par le théorème 1.2. Ce que dit le théorème 3.9, c'est que le maximum de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur le bord $\partial\Omega$ de Ω. Dans le cas où ce maximum est aussi atteint en $z_0 \in \Omega$, il est en fait atteint partout sur $\overline{\Omega}$, puisque f est constante.

Démonstration. On vient de vérifier que $\overline{\Omega}$ est un compact et que la borne supérieure de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$ est atteinte. On a montré la première égalité de (3.8).
Comme $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$, l'intersection de deux fermés, $\partial\Omega$ est fermé. Comme $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$, qui est bornée, $\partial\Omega$ est borné. Il est donc compact. Par le théorème 1.2, la borne supérieure de $|f|$ sur $\partial\Omega$ est aussi atteinte.
Soit z_0 un maximum de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$.
Cas où $z_0 \in \partial\Omega$. Alors

$$\max_{z\in\partial\Omega} |f(z)| \;\geq\; |f(z_0)| \;=\; \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|\,. \tag{3.9}$$

Comme $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$,

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \;=\; \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \;\geq\; \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)| \;=\; \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|\,. \tag{3.10}$$

On déduit de (3.9) et (3.10) l'égalité (3.8).
Cas où $z_0 \in \Omega$. Comme z_0 est aussi un maximum local de f sur le domaine Ω, f est constante sur Ω égale à un $c \in \mathbb{C}$, par le théorème 3.8. Pour $z \in \overline{\Omega}$, il existe une suite $(z_k)_k$ d'éléments de Ω telle que $z_k \to z$. Par continuité de f, $f(z) = \lim f(z_k)$ et, comme $z_k \in \Omega$, $f(z_k) = c$, pour tout k, on obtient $f(z) = c$. f est donc constante sur $\overline{\Omega}$. En particulier,

$$\max_{z\in\partial\Omega} |f(z)| \;=\; |c| \;=\; \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|\,,$$

ce qui donne encore (3.8). $\square$