S : fait en salle.

CHAPTER 5

FONCTIONS MÉROMORPHES.

Dans l'exemple 1.9, on a vu que, si P et $Q \neq 0$ sont des polynômes, alors P/Q est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Z(Q)$, où $Z(Q)$ est l'ensemble fini des zéros de Q. Dans ce chapitre, on va s'intéresser à des fonctions dites méromorphes, qui sont holomorphes en tout point d'un ouvert privé d'un ensemble discret et qui sont d'un certain type. La fraction P/Q est un exemple de fonction méromorphe.

S

5.1 Singularités isolées et développements de Laurent.

On introduit une classe de fonctions qui contient les fonctions méromorphes. On va utiliser la notion d'ensemble discret (cf. définition 1.5) et on a besoin d'une autre notion topologique.

Définition 5.1. *Soit Ω un ouvert non vide et F une partie de Ω. On dit que F est fermée dans Ω (ou est un fermé de Ω) si $\overline{F} \cap \Omega = F$.*

Proposition 5.1. *Soit Ω un ouvert non vide et F une partie de Ω.*

1. *Les propositions suivantes sont équivalentes : (F est fermé dans Ω), ($(\overline{F} \setminus F) \cap \Omega = \emptyset$), ($\Omega \setminus F$ est un ouvert) et (Pour toute suite d'éléments de F convergeant vers un élément de Ω, la limite est dans F).*
2. *Si F est fini alors F est fermé dans Ω.*
3. *Si F_1 et F_2 sont fermés dans Ω, $F_1 \cup F_2$ l'est aussi.*
4. *On suppose F discret et fermé dans Ω. Soit a un point d'accumulation de F. Alors $a \in (\overline{\Omega} \setminus \Omega)$.*
5. *Si F_1 et F_2 sont discrets et fermés dans Ω, $F_1 \cup F_2$ l'est aussi.*
6. *On suppose que Ω est un domaine et que F est discret et fermé dans Ω. Alors $\Omega \setminus F$ est un domaine.*

Démonstration. Voir TD. $\square$

La classe de fonctions que l'on va étudier est la suivante.

Définition 5.2. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie dans Ω. On dit que f est* holomorphe à singularités isolées *sur Ω s'il existe un sous-ensemble discret $\mathcal{S}$ de Ω tel que $\mathcal{S}$ est fermé dans Ω et f est holomorphe sur l'ouvert $\Omega \setminus \mathcal{S}$.*
Dans ce cas, un élément de $\mathcal{S}$ est appelé singularité isolée *de f et $\mathcal{S}$ est l'ensemble des singularités isolées de f.*

Exemple 5.1. *Quelques exemples importants.*

1. *Si P et $Q \neq 0$ sont des polynômes, alors P/Q est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$, d'ensemble de singularités isolées $Z(Q) = Q^{-1}(\{0\})$, puisque $Z(Q)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$, donc fermé dans $\mathbb{C}$, par la proposition 5.1.*

2. *Soit Ω un domaine, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et g non nulle. Par le principe des zéros isolés (cf. théorème 3.1), $Z(g)$ est un ensemble vide ou discret. Si $Z(g)$ est vide, c'est un fermé de Ω. Si $Z(g)$ est non vide, il est aussi fermé dans Ω : si $(z_n)_n \in Z(g)^{\mathbb{N}}$ converge vers un $\ell \in \Omega$ alors, par continuité de g en ℓ, on a $g(\ell) = \lim_n g(z_n) = 0$ donc $\ell \in Z(g)$. Par la proposition 5.1, $Z(g)$ est fermé dans Ω.*
   Par la proposition 1.27, f/g est holomorphe sur $\Omega \setminus Z(g)$ donc f/g est holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $Z(g)$.

3. *Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \exp(1/z)$. Par la proposition 1.27 et le théorème 2.1, f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ donc, comme l'ensemble fini $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{C}$ (cf. proposition 5.1), f est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$, d'ensemble de singularités isolées $\{0\}$.*

Bien sûr, dans les exemples précédents, le cas 1 est un cas particulier du cas 2. Plaçons-nous dans le cas 2. Soit $s \in Z(g)$. D'après le théorème 3.1, il existe $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $\tilde{g} : D(s; R[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et ne s'annulant pas, tels que

$$\forall\, z \in D(s; R[\,, \quad g(z) \;=\; (z - s)^n\, \tilde{g}(z)\,.$$

Comme $f/\tilde{g}$ est holomorphe sur $D(s; R[$, elle est DSE en s donc il existe $r \in]0; R]$ et une suite $(a_p)_p \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, z \in D(s; r[\setminus\{s\}\,, \quad \frac{f}{g}(z) \;=\; (z - s)^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} a_p\,(z - s)^p \;=:\; \sum_{q=-n}^{\infty} a_{n+q}\,(z - s)^q\,.$$

Dans le cas 3 de l'exemple 5.1, on a une situation similaire puisque

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*\,, \quad f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n} \;=:\; \sum_{q=-\infty}^{0} \frac{z^q}{(|q|)!}\,.$$

Soit f holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$. Soit $s \in \mathcal{S}$. À la lumière des exemples précédents, on s'attend à ce que, sur un certain disque épointé $D(s; r[\setminus\{s\}$, f soit la somme d'une série de fonctions du type

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\,(z - s)^n\,,$$

dans un sens à préciser.

Définition 5.3. *Soit $s \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle série de Laurent en s toute série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ telle que $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$,*

a). $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-s)^n$ est une série entière de rayon de convergence $\geq R$ et

b). $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{-n}(z-s)^n$ est une série entière de rayon de convergence $\geq 1/r$,

avec la convention $1/r = +\infty$ si $r = 0$.

Proposition 5.2. *Dans le cadre de la définition 5.3, on considère la couronne (ou l'anneau) $A(s;r;R) = \{z \in \mathbb{C}\,; r < |z-s| < R\}$. Soit g la somme sur $D(0;R[$ de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et soit h la somme sur $D(0;1/r[$ (avec la convention $D(0;1/r[= \mathbb{C}$ si $r = 0$) de la série $\sum_{n\geq 1} a_{-n} z^n$.*
$\boxed{\text{S}}$ *Alors, pour tout compact K inclus dans $D(s;R[$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$ converge normalement sur K et, pour tout compact K inclus dans $A(s;r;+\infty)$, la série $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-s)^{-n}$ converge normalement sur K.*
En particulier, pour tout compact K inclus dans l'anneau $A(s;r;R)$, les deux séries précédentes convergent normalement sur K.
Sur $D(s;R[$, la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$ est la fonction $D(s;R[\ni z \mapsto g(z-s)$. Sur $A(s;r;+\infty)$, la somme de la série $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-s)^{-n}$ est $A(s;r;+\infty) \ni z \mapsto h(1/(z-s))$.
La fonction $f : A(s;r;R) \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par

$$f(z) \;=\; g(z-s) + h\Big(\frac{1}{z-s}\Big)\,,$$

est holomorphe. C'est la somme de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ en s et on note

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(z-s)^n\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a, pour tout $\rho \in]r;R[$,

$$a_n \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho}} \frac{f(w)}{(w-s)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,, \tag{5.1}$$

où $\gamma_{s;\rho}$ est le chemin fermé C^1 $[0;2\pi] \ni t \mapsto s + \rho e^{it}$ d'image $C(s;\rho)$ (cf. corollaire 2.4).
Enfin, on a la formule de Cauchy suivante : pour tout $r < \rho_1 < \rho_2 < R$,

$$\forall\, z \in A(s;\rho_1;\rho_2)\,,\quad f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,. \tag{5.2}$$

Démonstration. La convergence normale de $\sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$ sur tout compact de $D(s;R[$ est assurée par le corollaire 2.1. Soit K inclus dans $A(s;r;+\infty)$ et

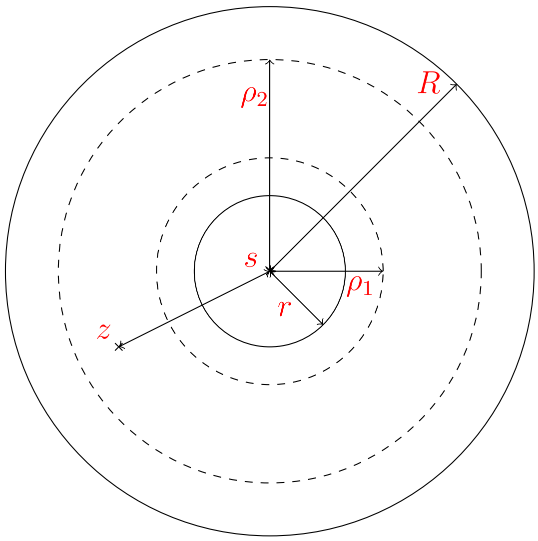
$$K' \;:=\; \big\{(z-s)^{-1}\,;\; z \in K\big\} \;\subset\; D(0;1/r[\,.$$

K' est un compact comme image d'un compact par une application continue. La convergence normale sur K de $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-s)^{-n}$ est équivalente à celle de $\sum_{n\geq 1} a_{-n} w^n$ sur K' et cette dernière est garantie par le corollaire 2.1.
Par inversion, composition et somme (cf. proposition 1.27), la fonction f est holomorphe sur

$A(s;r;R)$. Soit $\rho \in]r;R[$. Comme $C(s;\rho)$ est un compact inclus dans $A(s;r;R)$, les séries $\sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$ et $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-s)^{-n}$ convergent normalement sur $C(s;\rho)$ donc, d'après la proposition 1.20, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\gamma_{s;\rho}} \frac{f(w)}{(w-s)^{p+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\gamma_{s;\rho}} (w-s)^{n-p-1}\,\mathrm{d}w = 2i\pi\, a_p\,,$$

car le chemin $\gamma_{s;\rho}$ est fermé et, pour tout $n \neq p$, les fonctions $\mathbb{C}\setminus\{s\} \ni w \mapsto (w-s)^{n-p-1}$ admettent une primitive, et d'après (2.15). On a montré (5.1).
Il reste à montrer (5.2). Soit $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ et $z \in A(s;\rho_1;\rho_2)$ (voir dessin ci-dessous).



Par la formule de Cauchy appliquée à $g(\cdot - s)$ sur l'ouvert étoilé $D(s;R[$ (cf. théorème 4.7), on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{g(w-s)}{w-z}\,\mathrm{d}w = g(z-s)\,\mathrm{Ind}(\gamma_{s;\rho_2};z) = g(z-s) \tag{5.3}$$

car $z \in D(s;\rho_2[$, et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{g(w-s)}{w-z}\,\mathrm{d}w = g(z-s)\,\mathrm{Ind}(\gamma_{s;\rho_1};z) = 0 \tag{5.4}$$

car $z \notin D(s;\rho_1]$.
Soit $\rho \in \{\rho_1;\rho_2\}$. Pour $w \in C(s;\rho)$, on a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-s+s-z} = \frac{1}{s-z}\,\frac{1}{w-s}\,\frac{1}{\frac{1}{w-s}-\frac{1}{z-s}}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{s;\rho}} h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\,\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= -\,\frac{1}{z-s}\int_{\gamma_{s;\rho}} \frac{1}{w-s}\,h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\,\frac{1}{\frac{1}{w-s}-\frac{1}{z-s}}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{-i}{z-s}\int_0^{2\pi} h\big(e^{-it}/\rho\big)\,\frac{1}{\frac{e^{-it}}{\rho}-\frac{1}{z-s}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{z-s}\int_0^{2\pi} \big(h(w')/w'\big)_{|w'=e^{-it}/\rho}\,\frac{1}{\frac{e^{-it}}{\rho}-\frac{1}{z-s}}\,\frac{-ie^{-it}}{\rho}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{z-s}\int_{\gamma} \frac{h(w)}{w}\,\frac{1}{w-\frac{1}{z-s}}\,\mathrm{d}w\,,
\end{aligned}$$

où $\gamma = (\gamma_{s;1/\rho})_{\mathrm{opp}}$, dont l'image est $C(0;1/\rho)$.
Sur $D(0;1/r[\setminus\{0\}$, on a

$$\frac{h(w)}{w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\,w^{n-1}$$

et le rayon de convergence de la dernière série entière est $\geq 1/r$ (cf. corollaire 2.1). Donc $D(0;1/r[\setminus\{0\} \ni w \mapsto h(w)/w$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(0;1/r[$, qui est étoilé. Par la formule de Cauchy appliquée à ce prolongement (cf. théorème 4.7), on obtient

$$\int_{\gamma} \frac{h(w)}{w}\,\frac{1}{w-\frac{1}{z-s}}\,\mathrm{d}w = 2i\pi\,\mathrm{Ind}\big(\gamma;1/(z-s)\big)\,h\Big(\frac{1}{z-s}\Big)\,(z-s)$$

ce qui donne

$$\int_{\gamma_{s;\rho}} h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\,\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{2i\pi}{z-s}\mathrm{Ind}\big(\gamma;1/(z-s)\big)\,h\Big(\frac{1}{z-s}\Big)\,(z-s)\,.$$

Comme $\rho_1 < |z-s| < \rho_2$, $1/\rho_2 < 1/(z-s) < 1/\rho_1$. Pour $\rho = \rho_1$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma;1/(z-s)) = -1$ donc

$$\int_{\gamma_{s;\rho_1}} h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\,\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = -\,2i\pi\,h\Big(\frac{1}{z-s}\Big) \tag{5.5}$$

et, pour $\rho = \rho_2$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma;1/(z-s)) = 0$ donc

$$\int_{\gamma_{s;\rho_2}} h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\,\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0\,. \tag{5.6}$$

En utilisant (5.3), (5.4), (5.5) et (5.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{g(w-z)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{1}{w-z}\,h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\,\mathrm{d}w \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{g(w-z)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{1}{w-z}\,h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\,\mathrm{d}w \\
&= g(z-s) + 0 - 0 - (-2i\pi)\,h\Big(\frac{1}{z-s}\Big) = g(z-s) + h\Big(\frac{1}{z-s}\Big) \\
&= f(z)\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne (5.2). □

Pour une fonction f holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$ et $s \in \mathcal{S}$, on vérifie maintenant que f est "DSL en s", c'est-à-dire que f est la somme d'une série de Laurent sur un certain $D(s;R[\backslash\{s\}$. Pour ce faire, on va utiliser le

Lemme 5.1. *Soit $R>0$ et $g : D(0;R[\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On considère la fonction $I :]0;R[\longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $r \in]0;R[$,*

$$I(r) \ = \ \int_{\gamma_{0;r}} g(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

où $\gamma_{0;r}$ est le chemin fermé C^1 $[0;2\pi] \ni t \mapsto re^{it}$ d'image $C(0;r) \subset D(0;R[$ (cf. corollaire 2.4). Alors l'application I est constante.

Démonstration. Soit $h : D(0;R[\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \in (D(0;R[\backslash\{0\})$, $h(z) = zg(z)$. Pour $r \in]0;R[$,

$$I(r) \ = \ \int_0^{2\pi} g\left(re^{it}\right) rie^{it}\,\mathrm{d}t \ = \ i\int_0^{2\pi} h\left(re^{it}\right)\,\mathrm{d}t\,.$$

Comme g est holomorphe, h est holomorphe par produit (cf. proposition 1.27). D'après le théorème 4.4 et la proposition 3.1, h est C^1_h et, par la proposition 1.27, à t fixé, $]0;R[\ni r \mapsto h(re^{it})$ est C^1. En utilisant en plus le théorème 2.1, on montre, de même, qu'à r fixé, $[0;2\pi] \ni t \mapsto h(re^{it})$ est C^1. Par les propriétés des intégrales à paramètre réel, la fonction I est dérivable et on a, pour $r \in]0;R[$,

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r}(r) \ = \ i\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(h\left(re^{it}\right)\right)\,\mathrm{d}t\ .$$

Or, pour $r \in]0;R[$ et $t \in [0;2\pi]$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(h\left(re^{it}\right)\right) \ = \ h'\left(re^{it}\right) rie^{it} \ = \ ri\,\frac{\partial}{\partial r}\left(h\left(re^{it}\right)\right)\ .$$

On en déduit que, pour $r \in]0;R[$,

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r}(r) \ = \ \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(h\left(re^{it}\right)\right)\,\mathrm{d}t \ = \ 0$$

et que I est constante. □

Théorème 5.1. *Soit f une fonction holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$, et $s \in \mathcal{S}$. Il existe $R>0$ tel que, pour tous $0<\rho_1<\rho_2<R$, on*
S *a la formule de Cauchy (5.2). La fonction f est la somme, sur $D(s;R[\backslash\{s\}$, de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ en s dont les coefficients sont donnés par (5.1), pour tout $\rho \in]0;R[$. En particulier, par la proposition 5.2, f ne peut être la somme d'une autre série de Laurent. On appelle la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ le* DSL *de f en s.*

Démonstration. Comme $\mathcal{S}$ est discret, il existe un $R > 0$ tel que $D(s; R[\cap \mathcal{S} = \{s\}$. Soit $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$ et $z \in A(s; \rho_1; \rho_2)$. Soit $g : D(s; R[\longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(z) := f'(z)$ et, pour $w \neq z$,

$$g(w) \ := \ \frac{f(w) \ - \ f(z)}{w \ - \ z} \, .$$

D'après la preuve du théorème 4.7, g est holomorphe. D'après le lemme 5.1,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_2}} g(w) \, \mathrm{d}w \ = \ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_1}} g(w) \, \mathrm{d}w$$

donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_2}} f(w) \, \mathrm{d}w \ - \ f(z) \, \mathrm{Ind}(\gamma_{s;\rho_2}; z) \ = \ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_1}} f(w) \, \mathrm{d}w \ - \ f(z) \, \mathrm{Ind}(\gamma_{s;\rho_1}; z) \, .$$

Comme $z \in A(s; \rho_1; \rho_2)$, $z \in D(0; \rho_2[$ et $z \notin D(0; \rho_1]$ donc, par la proposition 2.9, $\mathrm{Ind}(\gamma_{s;\rho_1}; z) = 0$ et $\mathrm{Ind}(\gamma_{s;\rho_2}; z) = 1$. De la formule précédente, on déduit donc (5.2).
En écrivant, pour $w \in C(s; \rho_2)$, $w - z = w - s + s - z$, on a

$$\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w \ - \ z} \, \mathrm{d}w \ = \ \int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w \ - \ s} \, \frac{1}{1 \ - \ \frac{z-s}{w-s}} \, \mathrm{d}w \, .$$

Comme, pour $w \in C(s; \rho_2)$, $|(z - s)/(w - s)| \leq |z - s|/\rho_2 < 1$, on a la convergence normale sur $C(s; \rho_2)$ de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (z - s)^n/(w - s)^n$ (cf. corollaire 2.1), donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w \ - \ z} \, \mathrm{d}w \ &= \ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w \ - \ s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \ - \ s)^n}{(w \ - \ s)^n} \, \mathrm{d}w \\
&= \ \sum_{n=0}^{\infty} (z \ - \ s)^n \, \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{(w \ - \ s)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \\
&= \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z \ - \ s)^n
\end{aligned} \tag{5.7}$$

en définissant a_n, pour $n \geq 0$, par (5.1). En particulier, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n w^n$ converge pour $|w| < \rho_2$. Par le corollaire 2.1, son rayon de convergence est $\geq \rho_2$, pour tout $0 < \rho_2 < R$, donc est $\geq R$. On note par g sa somme sur $D(0; R[$.
Par ailleurs, on a, en utilisant la convergence normale sur $C(s; \rho_1)$ de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (w - s)^n/(z - s)^n$ (cf. $|z - s| > \rho_1$ et le corollaire 2.1),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{w \ - \ z} \, \mathrm{d}w \ &= \ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{s \ - \ z} \, \frac{1}{1 \ - \ \frac{w-s}{z-s}} \, \mathrm{d}w \\
&= \ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{s \ - \ z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w \ - \ s)^n}{(z \ - \ s)^n} \, \mathrm{d}w \\
&= \ - \ \sum_{n=0}^{\infty} (z \ - \ s)^{-n-1} \, \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{(w \ - \ s)^{-n-1+1}} \, \mathrm{d}w \\
&= \ - \ \sum_{p=1}^{\infty} (z \ - \ s)^{-p} \, a_{-p}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

où les a_{-p}, pour $p \geq 1$, sont donnés par (5.1). En particulier, la série entière $\sum_{p\geq 1} a_{-p} w^p$ converge pour tout $1/|w| > \rho_1$ donc pour tout $|w| < 1/\rho_1$. Par le corollaire 2.1, son rayon de convergence est $\geq 1/\rho_1$, pour tout $0 < \rho_1$, donc est infini. On note par h sa somme sur $\mathbb{C}$. Pour $z \in D(s; R[\setminus\{s\}$, on a donc, d'après (5.2), (5.7) et (5.8),

$$f(z) \;=\; g(z - s) \,+\, h\Big(\frac{1}{z - s}\Big)$$

donc la fonction f est bien la somme de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-s)^n$ sur $A(s; 0; R) = D(s; R[\setminus\{s\}$. $\square$

5.2 Théorème des résidus.

On établit ici un résultat très utile pour calculer des intégrales (cf. paragraphe 5.6).

Définition 5.4. *Dans le cadre de la proposition* ~~5.1~~ $\boxed{5.2}$, *pour chaque $s \in \mathcal{S}$, le coefficient a_{-1} (i.e. $h'(0)$) est appelé résidu de f en s, noté* $\mathrm{Res}(f; s)$.

$\boxed{\text{S}}$

Théorème 5.2. [*Théorème des résidus.*] *Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$. On considère $\gamma : [a; b] \longrightarrow \Omega \setminus \mathcal{S}$ un chemin fermé. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Res}(f; s)\,\mathrm{Ind}(\gamma; s)\,, \tag{5.9}$$

la somme étant finie car l'ensemble $\{s \in \mathcal{S}\,;\ \mathrm{Ind}(\gamma; s) \neq 0\}$ l'est.

Remarque 5.1. *Comme dans la partie 4.1, on peut remplacer l'hypothèse* ouvert étoilé *par l'hypothèse* ouvert simplement connexe, *voir la remarque 4.9. On ne peut cependant pas se passer d'une hypothèse sur Ω.*
Dans le cas où, pour un $z_0 \in \Omega$, f est donnée par $f(z) = g(z)/(z - z_0)$ avec g holomorphe sur Ω, la formule (5.9) redonne la formule de Cauchy (4.14) pour g. En effet, $\mathcal{S} = \{z_0\}$ et le DSL *de f en z_0 est $\sum_{p\geq -1} a_p (z - z_0)^p$ avec $a_{-1} = g(z_0)$ et, pour $p \geq 0$, $a_p = g^{(p+1)}(z_0)/((p+1)!)$ (puisque g est* DSE *en z_0, cf. théorème 4.4), donc le résidu de f en z_0 est $g(z_0)$.*

Démonstration. On commence par le

Lemme 5.2. *Il existe un ouvert étoilé borné $\tilde{\Omega}$ tel que $\tilde{\Omega} \cap \mathcal{S}$ est un ensemble fini,*

$$\gamma\big([a; b]\big) \;\subset\; \tilde{\Omega} \;\subset\; \overline{\tilde{\Omega}} \;\subset\; \Omega\,.$$

et, pour tout $w \in (\mathbb{C} \setminus \tilde{\Omega})$, $\mathcal{D}_w \cap \tilde{\Omega} \;=\; \emptyset$ où

$$\mathcal{D}_w \;:=\; \big\{w \,+\, t\,(w \,-\, z_0)\;,\quad t \in \mathbb{R}^+\big\}\,.$$

Démonstration. Voir TD. $\square$

Soit $\tilde{\Omega}$ satisfaisant les conditions du lemme 5.2. On remplace f par sa restriction à $\tilde{\Omega}$, que l'on note encore par f, et son ensemble de singularités isolées est $\tilde{\Omega} \cap \mathcal{S} = \{s_j\,,\ 1 \leq j \leq p\}$

avec, pour $1 \leq j \neq k \leq p$, $s_j \neq s_k$. Par le théorème 5.1, pour tout $1 \leq j \leq p$, il existe $R_j > 0$ tel que f est DSL en s_j sur $D(s_j; R_j[\setminus\{s_j\}$:

$$f(z) \;=\; g_j(z - s_j) + h_j\Big(\frac{1}{z - s_j}\Big)\,,$$

où $\mathbb{C} \setminus \{s_j\} \ni z \mapsto h_j(1/(z - s_j))$ est holomorphe et g_j est holomorphe sur $D(s_j; R_j[$. On considère $g : \tilde{\Omega} \setminus \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$g(z) \;=\; f(z) - \sum_{j=1}^{p} h_j\Big(\frac{1}{z - s_j}\Big)\,.$$

Par la proposition 1.27, g est holomorphe. Pour $1 \leq j \leq p$ et $z \in D(s_j; R_j[\setminus\{s_j\}$, on a

$$g(z) \;=\; g_j(z - s_j) - \sum_{k \neq j} h_k\Big(\frac{1}{z - s_k}\Big)\,.$$

Comme g_j est DSE en 0 sur $D(0; R_j[$ et comme, pour $k \neq j$, les $z \mapsto h_k(1/(z - s_k))$ sont holomorphes sur $D(s_j; R_j[$, g se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(s_j; R_j[$. Donc g admet un prolongement holomorphe, encore noté par g, à $\tilde{\Omega}$. Comme $\tilde{\Omega}$ est étoilé, g admet une primitive sur $\tilde{\Omega}$ (cf. théorème 4.3) et, comme γ est un chemin fermé, on a

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w \;&=\; \int_\gamma \bigg(f(w) - \sum_{j=1}^{p} h_j\Big(\frac{1}{w - s_j}\Big)\bigg)\,\mathrm{d}w \\ &=\; \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w - \sum_{j=1}^{p} \int_\gamma h_j\Big(\frac{1}{w - s_j}\Big)\,\mathrm{d}w\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

par la proposition 1.21. Pour $1 \leq j \leq p$, on a, en utilisant encore une convergence normale, pour des coefficients complexes $a_{-k}^{(j)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_\gamma h_j\Big(\frac{1}{w - s_j}\Big)\,\mathrm{d}w \;&=\; \int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{(j)}\,(w - s_j)^{-k}\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{(j)} \int_\gamma (w - s_j)^{-k}\,\mathrm{d}w \\ &=\; a_{-1}^{(j)}\,2i\pi\,\mathrm{Ind}(\gamma; s_j) \;=\; 2i\pi\,\mathrm{Res}(f; s_j)\,\mathrm{Ind}(\gamma; s_j) \end{aligned}$$

puisque, pour $k \neq 1$, $\mathbb{C} \setminus \{s_j\} \ni w \mapsto (w - s_j)^{-k}$ admet une primitive et γ est fermé (cf. proposition 1.28). En reportant dans (5.10), on obtient

$$\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; 2i\pi \sum_{s \in (\tilde{\Omega} \cap \mathcal{S})} \mathrm{Res}(f; s)\,\mathrm{Ind}(\gamma; s)\,. \tag{5.11}$$

Par la proposition 4.1, la fonction Ind_γ est nulle sur $\mathbb{C} \setminus D(0; R_0]$, pour un $R_0 > 0$. Comme $\tilde{\Omega}$ est borné, il existe $R > R_0 + |z_0|$ tel que $\tilde{\Omega} \subset D(z_0; R[$. En particulier, $C(z_0; R) \subset \mathbb{C} \setminus D(0; R_0]$. Soit $s \in (\mathcal{S} \setminus \tilde{\Omega})$.
Si $|s - z_0| > R$ alors $|s| > R_0$ donc $\mathrm{Ind}_\gamma(s) = 0$.
Supposons $|s - z_0| \leq R$. D'après le lemme 5.2, $\mathcal{D}_s \cap \tilde{\Omega} = \emptyset$. De plus, il existe $t \geq 0$ tel que $s_t := s + t(s - z_0) \in C(z_0; R)$. Donc le chemin $\psi_{s;s_t}$ relie continûment s à s_t sans toucher $\tilde{\Omega}$

donc sans toucher $\gamma([a;b])$. Par la proposition 4.1, $\mathrm{Ind}_\gamma(s) = \mathrm{Ind}_\gamma(s_t) = 0$.
On a montré que, pour tout $s \in (\mathcal{S} \setminus \tilde{\Omega})$, $\mathrm{Ind}_\gamma(s) = 0$ donc

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Res}(f;s)\,\mathrm{Ind}(\gamma;s) = \sum_{s\in(\tilde{\Omega}\cap\mathcal{S})} \mathrm{Res}(f;s)\,\mathrm{Ind}(\gamma;s)$$

ce qui, avec (5.11), donne (5.9). □

5.3 Classification des singularités.

Pour une fonction holomorphe à singularités isolées, on distingue différents types de singularité.

$\boxed{\text{S}}$

Définition 5.5. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$. Soit $s \in \mathcal{S}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ le* DSL *de f en s.*

1. *Si, pour tout $n < 0$, $a_n = 0$ (i.e. $h = 0$), on dit que s est une singularité artificielle (ou rétractable) de f.*
2. *Si l'ensemble $\mathcal{C}_s := \{n \in \mathbb{N}^*\,;\ a_{-n} \neq 0\}$ est non vide et fini, on dit que s est un pôle de f d'ordre n_0, où $n_0 = \max \mathcal{C}_s$ (i.e. h est un polynôme de degré n_0).*
3. *Si l'ensemble $\mathcal{C}_s$ est infini, on dit que s est une singularité essentielle de f.*
4. *On dit que f est méromorphe sur Ω si elle n'a pas de singularité essentielle.*

On peut repérer le type d'une singularité sans connaître le DSL en cette singularité, comme le montre le

Théorème 5.3. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$ et $s \in \mathcal{S}$.*

1. *Soit $\mathcal{I}_s := \{n \in \mathbb{N}\,;\ \lim_{z\to s}(z-s)^n f(z)$ existe$\}$. Alors $\mathcal{I}_s$ est vide ou bien il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{I}_s = [n_0;+\infty[\,\cap\,\mathbb{N}$.*
2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   P_1. *s est une singularité artificielle de f.*

   P_2. *Il existe un $r > 0$ tel que la restriction de f à $D(s;r[\setminus\{s\}$ se prolonge en une application holomorphe sur $D(s;r[$.*

   P_3. $\lim_s f$ *existe dans $\mathbb{C}$.*

   P_4. $\lim_s |f|$ *existe dans $\mathbb{R}^+$.*

   P_5. *Il existe $r > 0$ tel que la restriction de f à $D(s;r] \setminus \{s\}$ est bornée.*
3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   Q_1. *s est un pôle de f.*

   Q_2. $\lim_s f$ *n'existe pas dans $\mathbb{C}$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim_{z\to s}(z-s)^n f(z)$ existe.*

Q_3. $\lim_s f$ *n'existe pas dans* $\mathbb{C}$ *et il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $r > 0$ *tels que* s *est une singularité artificielle de* $D(s;r[\setminus\{s\} \ni z \mapsto (z-s)^n f(z)$.

Q_4. $\lim_s |f|$ *existe et vaut* $+\infty$.

4. *s est une singularité essentielle de f si et seulement si* $\lim_s |f|$ *n'existe pas.*

5. *Si s est une singularité artificielle de f alors $\mathcal{I}_s = \mathbb{N}$. Si s est un pôle de f alors son ordre est le minimum de $\mathcal{I}_s$. Si s est une singularité essentielle de f alors $\mathcal{I}_s$ est vide.*

6. *Soit $z_0 \in \Omega$ tel z_0 ne soit pas une singularité essentielle de f. Alors il existe $r > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ et une fonction holomorphe $g : D(z_0;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que*

$$\forall\, z \in D(z_0;r[\setminus\{z_0\}\,, \quad f(z) \;=\; (z\,-\,z_0)^p\, g(z)\,. \tag{5.12}$$

Démonstration. Supposons $n \in \mathcal{I}_s$. Pour $p > n$, on a, sur un $D(s;r[\setminus\{s\}$, $(z-s)^p f(z) = (z-s)^{p-n}(z-s)^n f(z)$, qui tend vers 0, quand $z \to s$. Donc $p \in \mathcal{I}_s$ et $[n;+\infty[\cap\mathbb{N} \subset \mathcal{I}_s$. En posant $n_0 = \min \mathcal{I}_s$, on a donc $\mathcal{I}_s = [n_0;+\infty[\cap\mathbb{N}$.
$P_1 \implies P_2$: Par hypothèse, il existe $r > 0$ telle que $f(z) = g(z-s) + h(1/(z-s))$ sur $D(s;r[\setminus\{s\}$ avec g holomorphe sur $D(0;r[$ et h nulle. Donc f se prolonge en la fonction holomorphe $D(s;r[\ni z \mapsto g(z-s)$.
$P_2 \implies P_3$: Le prolongement g de f sur $D(s;r[$ est holomorphe donc continu en s. Donc $\lim_s f = g(s)$.
$P_3 \implies P_4$: Comme $\lim_s f$ existe et le module est continu et positif, $\lim_s |f|$ existe dans $\mathbb{R}^+$.
$P_4 \implies P_5$: Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que, sur $D(s;r[\setminus\{s\}$, $|f| < 1 + \lim_s |f|$. La restriction de f à $D(s;r[\setminus\{s\}$ est donc bornée.
$P_5 \implies P_1$: Il existe $R > 0$ tel que, pour $z \in D(s;R[\setminus\{s\}$, $f(z) = g(z-s) + h(1/(z-s))$. Comme g est holomorphe sur $D(0;R[$, elle y est continue. D'après l'hypothèse, il existe $r \in]0;R[$ tel que f est bornée sur $D(s;r] \setminus \{s\}$ et, comme $r < R$, $g(\cdot - s)$ est bornée sur $D(s;r] \setminus \{s\}$. Donc $D(s;r] \setminus \{s\} \ni z \mapsto h(1/(z-s))$ est aussi bornée. Comme la fonction $1/(\cdot - s)$ envoie $D(s;r] \setminus \{s\}$ sur $\mathbb{C} \setminus D(0;1/r[$, h est bornée sur $\mathbb{C} \setminus D(0;1/r[$. Comme h est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est continue donc bornée sur $D(0;1/r]$. Donc h est bornée. Par le théorème de Liouville (cf. théorème 3.4), h est constante et, comme $h(0) = 0$, h est nulle. Donc s est une singularité artificielle de f.
D'après l'équivalence $P_1 \iff P_2$, on a l'équivalence $Q_2 \iff Q_3$.
$Q_1 \implies Q_2$: D'après $P_1 \iff P_3$, $\lim_s f$ n'existe pas. Il existe $R > 0$ tel que, pour $z \in D(s;R[\setminus\{s\}$, $f(z) = g(z-s) + h(1/(z-s))$. D'après l'hypothèse, h est un polynôme non nul

$$h(w) \;=\; \sum_{k=0}^{n} b_k\, w^k$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est le degré de h. Pour $z \in D(s;R[\setminus\{s\}$, on a donc

$$(z\,-\,s)^n\, f(z) \;=\; (z\,-\,s)^n\, g(z\,-\,s) + \sum_{k=0}^{n} b_k\, (z\,-\,s)^{n-k}$$

qui tend vers b_n, quand $z \to s$.
$Q_2 \implies Q_4$: D'après $Q_2 \iff Q_3$ et $P_1 \iff P_2$, il existe $r > 0$ tel que la fonction $D(s;r[\setminus\{z\} \ni z \mapsto (z-s)^n f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur $D(s;r[$.

Quitte à réduire r, on peut supposer que le DSE $\sum_{p\geq 0} a_p(z-s)^p$ de F en s converge sur $D(s;r[$. On a donc, pour $z \in D(s;r[\setminus\{z\}$,

$$f(z) \;=\; \frac{F(z)}{(z\,-\,s)^n} \;=\; \sum_{q=-n}^{+\infty} a_{q+n}\,(z\,-\,s)^q$$

et c'est le DSL de f en s (par unicité de ce dernier). Si les a_{q+n}, pour $q<0$, étaient tous nuls alors f aurait une limite en s. Cela contredit l'hypothèse. Soit $q_0<0$ le plus petit indice q tel que $a_{q+n}\neq 0$. On a donc, pour $z\in D(s;r[\setminus\{z\}$,

$$f(z) \;=\; (z\,-\,s)^{q_0}\sum_{q=q_0}^{+\infty} a_{q+n}\,(z\,-\,s)^{q-q_0}\,,$$

où la somme précédente tend vers $a_{q_0}\neq 0$, quand $z\to s$. Donc $\lim_s|f| = +\infty$ car $a_{q_0}\neq 0$ et $\lim_{z\to s}|z-s|^{q_0} = +\infty$.
$Q_4 \Longrightarrow Q_1$: Il existe $R>0$ tel que, pour $z\in D(s;R[\setminus\{s\}$, $f(z) = g(z-s)+h(1/(z-s))$. Comme g est holomorphe sur $D(0;R[$, $\lim_s g(\cdot - s) = g(0)$. Pour $z\in D(s;R[\setminus\{s\}$,

$$\left|h\Big(\frac{1}{z\,-\,s}\Big)\right| \;\geq\; |f(z)|\,-\,|g(z\,-\,s)| \;\to\; +\infty$$

quand $z\to s$, et, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{z\to s}\left|h\Big(\frac{1}{z\,-\,s}\Big)\right| \;=\; +\infty\,.$$

Comme $\lim_{|w|\to+\infty} s+1/w = s$, on en déduit que, par composition de limites, on en déduit que $\lim_{|w|\to+\infty}|h(w)| = +\infty$. Par le théorème 3.7, on en déduit que h est une fonction polynôme. Donc s est un pôle de f.
D'après les équivalences $P_1 \Longleftrightarrow P_4$ et $Q_1\Longleftrightarrow Q_4$, on a l'équivalence du point 3.
Si s est une singularité artificielle de f alors $0\in\mathcal{I}_s$ par P_3 donc, par 1, $\mathcal{I}_s = \mathbb{N}$.
Soit s un pôle de f. Alors $\mathcal{I}_s\neq\emptyset$ et $0\notin\mathcal{I}_s$, par Q_2. Soit $n_1 = \min\mathcal{I}_s$ et $n_0>0$ l'ordre de s. D'après la preuve de $Q_1\Longrightarrow Q_2$, $n_0\in\mathcal{I}_s$ donc, par 1, $n_0\geq n_1$. Toujours par la preuve de $Q_1\Longrightarrow Q_2$, on a, pour $z\in D(s;r[\setminus\{z\}$,

$$(z-s)^{n_1}\,f(z) \;=\; (z-s)^{n_1}\,g(z-s)+\sum_{k=0}^{n_1} b_k\,(z-s)^{n_1-k}+(z-s)^{n_1-n_0}\sum_{k=n_1}^{n_0} b_k\,(z-s)^{n_0-k}\,.$$

Les trois premiers termes ont une limite quand $z\to s$ donc le dernier aussi. Comme la dernière somme tend vers $b_{n_0}\neq 0$, $z\mapsto(z-s)^{n_1-n_0}$ est bornée donc $n_1=n_0$.
Soit s une singularité essentielle de f. Supposons qu'on ait un $n\in\mathcal{I}_s$. Si $n=0$ alors, d'après $P_1\Longleftrightarrow P_3$, s est une singularité artificielle. Contradiction. Si $n>0$ et $0\notin\mathcal{I}_s$ alors, d'après $Q_1\Longleftrightarrow Q_2$, s est un pôle de f. Contradiction. Donc $\mathcal{I}_s$ est vide.
Soit $z_0\in\Omega\setminus\mathcal{S}$. Si $f(z_0)\neq 0$, f ne s'annule pas sur un petit disque $D(z_0;r[\subset(\Omega\setminus\mathcal{S})$, par continuité, donc on a la propriété souhaitée avec $p=0$, $g=f$. Si z_0 est un zéro d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$ de f, soit $R>0$ tel que $D(z_0.R[\subset(\Omega\setminus\mathcal{S})$. Alors on a la propriété souhaitée avec $p=n$ d'après le théorème des zéros isolés appliquée à la restriction de f au disque $D(z_0.R[$ (cf. théorème 3.1).

Soit $z_0 \in \mathcal{S}$ une singularité artificielle de f. D'après 2, f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur un $D(z_0; r[$ et on est ramené au cas précédent avec f remplacée par $\tilde{f}$. Soit $z_0 \in \mathcal{S}$ un pôle de f d'ordre n. D'après 3, z_0 est une singularité artificielle d'une fonction $\tilde{f} : D(z_0; r[\longrightarrow \mathbb{C}$, pour un $r > 0$, donnée par $\tilde{f}(z) = (z - z_0)^n f(z)$. D'après le cas précédent, il existe $r_0 \in]0; r]$, $p_0 \in \mathbb{N}$ et $g : D(z_0; r_0[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(z_0; r_0[\setminus \{z_0\}\,, \quad (z - z_0)^n\, f(z) \;=\; (z - z_0)^{p_0}\, g(z)\,,$$

ce qui donne la propriété souhaitée pour $p = p_0 - n$. □

Exemple 5.2. *Quelques exemples.*

1. *Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \sin(z)/z$. Comme* sin *est $\mathbb{C}$-dérivable en* 0 *de nombre $\mathbb{C}$-dérivé* 1, $\lim_0 f$ *existe et vaut* 1. *Par le théorème 5.3,* 0 *est une singularité artificielle de f.*

2. *Soit $g : \mathbb{C} \setminus \{0; 1; 2\} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction holomorphe donnée par*

$$g(z) \;=\; \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 2}{z\,(z^3 - 4z^2 + 5z - 2)} \;=\; \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 2}{z\,(z - 1)^2\,(z - 2)}\,.$$

On utilise le théorème 5.3. On voit que $\lim_0 g$ *et* $\lim_1 g$ *n'existent pas donc* 0 *et* 1 *ne sont pas des singularités artificielles de g. En revanche, on remarque que*

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 2 \;=\; (z - 2)(z^2 - z + 1)$$

donc $\lim_2 g$ *existe et vaut* $3/2$. *Donc* 2 *est une singularité artificielle de g. En particulier, le résidu de g en* 2 *est nul. Comme* $\lim_{z\to 0} zg(z)$ *existe et* $\lim_0 g$ *n'existe pas,* 0 *est un pôle d'ordre* 1 *de g. Comme* $\lim_{z\to 2} g(z)$ *n'existe pas,* $\lim_{z\to 2}(z-2)g(z)$ *n'existe pas et* $\lim_{z\to 2}(z-2)^2 g(z)$ *existe,* 2 *est un pôle d'ordre* 2 *de g. Puisque g n'a pas de singularité essentielle, g est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. On déterminera plus loin les résidus de g en* 0 *et* 1.

3. *Soit $h : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $h(z) = \exp(1/z)$. Par composition, elle est holomorphe. Par définition de l'exponentielle, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,*

$$h(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, z^{-n}\,.$$

Par unicité, il s'agit du DSL *de h en* 0. *Comme le coefficient de chaque puissance négative est non nul,* 0 *est une singularité essentielle de h (cf. définition 5.5). Par le théorème 5.3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto z^n h(z)$ n'ont pas de limite en* 0 *et $|h|$ n'a pas de limite en* 0. *De plus, pour tout $r > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto z^n h(z)$ à $D(0; r] \setminus \{0\}$ n'est pas bornée. Grâce au développement précédent, le résidu de h en* 0 *est* $1/(1!) = 1$.

4. *On reprend le 2 de l'exemple 5.1. Soit $s \in Z(g)$ et n l'ordre de s comme zéro de g. D'après le théorème 3.1,*

S

$$\lim_{z\to s}\,(z - s)^n\,\frac{f(z)}{g(z)}$$

existe donc, par le théorème 5.3, s est soit une singularité artificielle soit un pôle de f/g. Donc f/g est une fonction méromorphe.

5.4 Opérations.

Dans cette partie, on vérifie que l'ensemble des fonctions holomorphes à singularités isolées sur un ouvert est stable par certaines opérations.
Par commodité, on introduit la

Définition 5.6. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions holomorphes à singularités isolées sur Ω est noté $\mathcal{H}_{si}(\Omega)$.*

Proposition 5.3. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, $f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, $f_1 f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, $\lambda f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_1' \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) l'ensemble des singularités isolées de f_1 (resp. f_2). Comme λf_1 et f_1' sont holomorphes sur $\Omega \setminus \mathcal{S}_1$ (cf. proposition 1.27, théorème 4.4 et définition 3.2), $\lambda f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_1' \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$. Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. D'après la proposition 5.1, $\mathcal{S}$ est discret et fermé dans Ω. Par la proposition 1.27, $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ sont holomorphes sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$. Donc $f_1 + f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_1 f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$. □

Proposition 5.4. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit $f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, la fonction f_2 étant non nulle. Soit $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) l'ensemble des singularités isolées de f_1 (resp. f_2). Soit $Z(f_1)$ l'ensemble des zéros de f_1 et $Z := Z(f_2)$ l'ensemble des zéros de f_2.*

1. *L'ensemble Z des zéros de f_2 est un ensemble discret et fermé dans $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$.*
2. *Si $s \in ((\overline{Z} \setminus Z) \cap \Omega)$ alors s est une singularité essentielle de f_2.*
3. *$f_1/f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et son ensemble de singularités isolées est $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup Z$.*
4. *Soit s une singularité essentielle de f_1. Alors, si s n'est pas une singularité essentielle de f_2, s est aussi une singularité essentielle de f_1/f_2.*
5. *Soit s une singularité essentielle de f_2. Alors, si s n'est pas une singularité essentielle de f_1, s est aussi une singularité essentielle de f_1/f_2.*

Démonstration. Par hypothèse, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont discrets et fermés dans Ω donc $\overline{\mathcal{S}_1} \cap \Omega = \mathcal{S}_1$ et $\overline{\mathcal{S}_2} \cap \Omega = \mathcal{S}_2$. Par la proposition 5.1, $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$ est un domaine.

1. Comme f_2 est holomorphe sur le domaine $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$, Z est un ensemble discret, par le théorème des zéros isolés (cf. théorème 3.1). Soit $(z_n)_n \in Z^{\mathbb{N}}$ une suite tendant vers un $z \in (\Omega \setminus \mathcal{S}_2)$. Comme f_2 est continue en z, $f_2(z) = \lim f_2(z_n) = 0$ donc $z \in Z$. Donc Z est fermé dans $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$, par la proposition 5.1.

2. Par hypothèse, il existe une suite $(z_n)_n \in Z^{\mathbb{N}}$ tendant vers s. Comme on suppose que $s \notin Z$, $s \notin (\Omega \setminus \mathcal{S}_2)$, par le 1. Or $s \in \Omega$ par hypothèse, donc $s \in \mathcal{S}_2$.
Supposons que s soit un pôle de f_2. Par le théorème 5.3, $\lim_s |f_2| = +\infty$. Donc, par composition de limites, $+\infty = \lim |f_2(z_n)|$. Contradiction puisque la suite $(f_2(z_n))_n$ est nulle.
Supposons que s soit une singularité artificielle de f_2. Par le théorème 5.3, il existe $r > 0$ tel que la restriction de f_2 à $D(s; r[\setminus\{s\}$ se prolonge en une fonction holomorphe g sur $D(s; r[$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $z_n \in D(s; r[\setminus\{s\}$. Pour $n \geq N$,

$g(z_n) = f_2(z_n) = 0$ et, comme g est continue en s, $g(s) = \lim f_2(z_n) = 0$. Le point s est donc un point d'accumulation de $Z(g)$. Par le théorème des zéros isolés sur le domaine $D(s;r[$ (cf. théorème 3.1), g est nulle. Donc f_2 est nulle sur $D(s;r[\setminus\{s\}$. Comme $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$ est un domaine, le théorème des zéros isolés (cf. théorème 3.1) impose que f_2 soit nulle. Contradiction avec l'hypothèse sur f_2.
Conclusion : s est forcément une singularité essentielle de f_2.

3. Le quotient $f_1(z)/f_2(z)$ n'est définie que si $z \in \Omega$ et $z \notin (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup Z)$. De plus, par la proposition 1.27, f_1/f_2 est holomorphe sur $\Omega \setminus (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup Z)$.
Par la proposition 5.1 et le point 1, l'ensemble $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup Z$ est discret et fermé dans Ω. On a montré que $f_1/f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$.

4. Comme s n'est pas une singularité essentielle de f_2, il existe, d'après le 6 du théorème 5.3, $r_2 > 0$, $p_2 \in \mathbb{Z}$ et $g_2 : D(s;r_2[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(s;r_2[\setminus\{s\}\,, \quad f_2(z) \;=\; (z\,-\,z_0)^{p_2}\, g_2(z)\,.$$

Supposons que s n'est pas une singularité essentielle de f_1/f_2. Alors, par le 6 du théorème 5.3, il existe $r \in]0;r_2]$, $p \in \mathbb{Z}$ et $g : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(s;r[\setminus\{s\}\,, \quad \frac{f_1}{f_2}(z) \;=\; (z\,-\,z_0)^{p}\, g(z)\,.$$

Donc, sur $D(s;r[\setminus\{s\}$, $f_1(z) = (z-s)^{p+p_2}g(z)g_2(z)$ et, comme $\lim_s gg_2 = g(s)g_2(s) \neq 0$, $\lim_s |f_1|$ existe. D'après le 4 du théorème 5.3, cela contredit l'hypothèse selon laquelle s est une singularité essentielle de f_1. Donc s est bien une singularité essentielle de f_1/f_2.

5. Supposons que s n'est pas une singularité essentielle de f_1/f_2. Comme au 4, il existe $r > 0$, $(p;p_1) \in \mathbb{Z}^2$, $g, g_1 : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(s;r[\setminus\{s\}\,, \quad \frac{f_1}{f_2}(z) \;=\; (z\,-\,z_0)^{p}\, g(z) \quad \text{et} \quad f_1(z) \;=\; (z\,-\,z_0)^{p_1}\, g_1(z)\,.$$

Donc, sur $D(s;r[\setminus\{s\}$, $f_2(z) = (z-s)^{p_1-p}g_1(z)/g(z)$ et, comme $\lim_s g_1/g = g_1(s)/g(s) \neq 0$, $\lim_s |f_2|$ existe. D'après le 4 du théorème 5.3, cela contredit l'hypothèse selon laquelle s est une singularité essentielle de f_2. Donc s est bien une singularité essentielle de f_1/f_2. □

Remarque 5.2. *La situation du 2 de cette proposition 5.4 se produit dans l'exemple suivant. Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \cos(1/z)$ et $\Omega = \mathbb{C}$. Par composition, f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Donc $f \in \mathcal{H}_{si}(\mathbb{C})$. On vérifie (cf. TD) que*

$$Z(f) \;=\; \left\{\frac{1}{\pi/2\,+\,n\pi}\,;\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Le point 0 est point d'accumulation de $Z(f)$, puisque la suite $(1/(\pi/2 + n\pi))_n$ tend vers 0, et $0 \notin Z(f)$, puisque $Z(f) \subset \mathbb{C}^*$. Donc $0 \in ((\overline{Z(f)} \setminus Z(f)) \cap \Omega)$.
Le 2 de la proposition 5.4 montre que 0 est une singularité essentielle de f ce que l'on peut retrouver en utilisant le DSE *de cosinus sur $\mathbb{C}$.*

5.5 Fonctions méromorphes.

S

Parmi les fonctions holomorphes à singularités isolées, on se concentre ici sur les fonctions méromorphes qui ont été définies dans la définition 5.5.

Définition 5.7. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω est noté $\mathcal{M}(\Omega)$.*

Proposition 5.5. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f_1 f_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\lambda f_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $f_1' \in \mathcal{M}(\Omega)$.*

Démonstration. Par la preuve de la proposition 5.3, $f_1 + f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, $f_1 f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, $\lambda f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_1' \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_1$, respectivement.
Soit $s \in \mathcal{S}_1$. Comme s n'est pas une singularité essentielle de f_1, puisque f_1 est méromorphe, $\lim_s |f_1|$ existe (cf. le 4 du théorème 5.3) donc $\lim_s |\lambda f_1|$ existe.
Soit $s \in \mathcal{S}$. Comme f_1 et f_2 sont méromorphes, s n'est ni une singularité essentielle pour f_1 ni pour f_2. Par le 6 du théorème 5.3, il existe $r > 0$, $(p_1; p_2) \in \mathbb{Z}^2$ et des fonctions holomorphes $g_1, g_2 : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(s;r[\setminus\{s\}\,, \quad f_1(z) \;=\; (z-s)^{p_1}\, g_1(z) \quad \text{et} \quad f_2(z) \;=\; (z-s)^{p_2}\, g_2(z)\,. \tag{5.13}$$

Donc $\lim_s |f_1 f_2|$ existe.
Sur $D(s;r[\setminus\{s\}$, on peut écrire, si $p_1 > p_2$,

$$f_1(z) + f_2(z) \;=\; (z-s)^{p_1}\left(g_1(z) + (z-s)^{p_2-p_1}\, g_2(z)\right)$$

et, si $p_1 < p_2$,

$$f_1(z) + f_2(z) \;=\; (z-s)^{p_2}\left((z-s)^{p_1-p_2}\, g_1(z) + g_2(z)\right).$$

Lorsque $p_1 = p_2 = p$, on peut écrire sur $D(s;r[\setminus\{s\}$, d'après la preuve du théorème des zéros isolés pour $g_1 + g_2$ sur le domaine $D(s;r[$ si $g_1(s) + g_2(s) = 0$,

$$f_1(z) + f_2(z) \;=\; (z-s)^p\,(z-s)^n\, g(z)$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et g holomorphe ne s'annulant pas en s. Dans tous les cas, $\lim_s |f_1 + f_2|$ existe.
Soit $s \in \mathcal{S}_1$. D'après (5.13), on a, sur $D(s;r[\setminus\{s\}$,

$$f_1'(z) \;=\; p_1\,(z-s)^{p_1-1}\, g_1(z) + (z-s)^{p_1}\, g_1'(z) \;=\; (z-s)^{p_1-1}\left(p_1 g_1(z) + (z-s)\, g_1'(z)\right)$$

donc $\lim_s |f_1'|$ existe.
Par le 4 du théorème 5.3, $s \in \mathcal{S}_1$ n'est pas une singularité essentielle de f_1' ni de λf_1 et $s \in \mathcal{S}$ n'est pas une singularité essentielle de $f_1 + f_2$ ni de $f_1 f_2$. Les fonctions f_1', λf_1, $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ sont donc méromorphes. □

Que peut-on dire d'un quotient de fonctions méromorphes ?

S

Proposition 5.6. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, la fonction g étant non nulle. Soit $\mathcal{P}_f$ (resp. $\mathcal{P}_g$) l'ensemble des pôles de f (resp. g).*

S

1. *$f/g \in \mathcal{M}(\Omega)$.*
2. *Si $s \in (\mathcal{P}_f \setminus (Z(g) \cup \mathcal{P}_g))$ et si n_f est l'ordre de s comme pôle de f, alors s est un pôle de f/g d'ordre n_f.*
3. *Si $s \in (\mathcal{P}_f \cap \mathcal{P}_g)$, n_f est l'ordre de s comme pôle de f, n_g est l'ordre de s comme pôle de g, alors, si $n_f > n_g$, s est un pôle de f/g d'ordre $n_f - n_g$ et, si $n_f \leq n_g$, s est une singularité artificielle de f/g.*
4. *Si $s \in (\mathcal{P}_f \cap Z(g))$, n_f est l'ordre de s comme pôle de f, N_g est l'ordre de s comme zéro de g, alors s est un pôle de f/g d'ordre $n_f + N_g$.*
5. *Si $s \in (Z(g) \setminus (Z(f) \cup \mathcal{P}_f))$ et si N_g est l'ordre de s comme zéro de g, alors s est un pôle de f/g d'ordre N_g.*
6. *Si $s \in (Z(g) \cap Z(f))$, N_g est l'ordre de s comme zéro de g, N_f est l'ordre de s comme zéro de f, alors, si $N_f \geq N_g$, s est une singularité artificielle de f/g et, si $N_f < N_g$, s est un pôle de f/g d'ordre $N_g - N_f$.*

Démonstration. On note par $\mathcal{S}_f$ (resp. $\mathcal{S}_g$) l'ensemble des singularités isolées de f (resp. g). Par le 3 de la proposition 5.4, $f/g \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g \cup Z(g)$. Soit $z_0 \in \Omega$. Comme f et g sont méromorphes, il existe, d'après le 6 du théorème 5.3, $r > 0$, $(p; q) \in \mathbb{Z}^2$ et $f_1, g_1 : D(z_0; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\setminus\{z_0\}\,, \quad f(z) = (z - z_0)^p f_1(z) \quad \text{et} \quad g(z) = (z - z_0)^q g_1(z)\,. \tag{5.14}$$

1. Il reste à vérifier que f/g n'a pas de singularité essentielle. Soit $z_0 \in (\mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g \cup Z(g))$. D'après (5.14), $\lim_{z_0} |f/g|$ existe donc, par le 4 du théorème 5.3, z_0 n'est pas une singularité essentielle de f/g.
2. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.3, on a (5.14) avec $z_0 = s$, $p = -n_f < 0$ et $q = 0$. On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n < n_f$, $\lim_{z\to s}(z - s)^n (f/g)(z)$ n'existe pas tandis que $\lim_{z\to s}(z - s)^{n_f}(f/g)(z)$ existe. Par les points 3 et 5 du théorème 5.3, s est un pôle de f/g d'ordre n_f.
3. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.3, on a (5.14) avec $z_0 = s$, $p = -n_f < 0$ et $q = -n_g < 0$. On en déduit que, si $n_f \leq n_g$, $\lim_s(f/g)$ existe donc, par le 2 du théorème 5.3, s est une singulartité artificielle de f/g. On déduit de (5.14) que, si $n_f > n_g$, $\lim_{z\to s}(z - s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas pour $n < n_f - n_g$ et existe pour $n = n_f - n_g$. Par les points 3 et 5 du théorème 5.3, s est un pôle de f/g d'ordre $n_f - n_g$.
4. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.3, on a (5.14) avec $z_0 = s$, $p = -n_f < 0$ et $q = N_g > 0$. On en déduit que $\lim_{z\to s}(z-s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas pour $n < n_f + N_g$ et existe pour $n = n_f + N_g$. Par les points 3 et 5 du théorème 5.3, s est un pôle de f/g d'ordre $n_f + N_g$.
5. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.3, on a (5.14) avec $z_0 = s$, $p = 0$ et $q = N_g > 0$. On en déduit que $\lim_{z\to s}(z - s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas pour $n < N_g$ et existe pour $n = N_g$. Par les points 3 et 5 du théorème 5.3, s est un pôle de f/g d'ordre N_g.

6. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.3, on a (5.14) avec $z_0 = s$, $p = N_f > 0$ et $q = N_g > 0$. On en déduit que, si $N_f \geq N_g$, $\lim_s(f/g)$ existe donc, par le 2 du théorème 5.3, s est une singulartité artificielle de f/g. On déduit de (5.14) que, si $N_f < N_g$, $\lim_{z \to s}(z-s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas pour $n < N_g - N_f$ et existe pour $n = N_g - N_f$. Par les points 3 et 5 du théorème 5.3, s est un pôle de f/g d'ordre $N_g - N_f$. □

Dans le 4 de l'exemple 5.2, on a vu qu'un quotient de fonctions holomorphes sur un domaine Ω est une fonction méromorphe. On va maintenant montrer que, "localement", une fonction méromorphe est un quotient de fonctions holomorphes.

Théorème 5.4. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie dans Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

$\boxed{S}$

1. *La fonction f est méromorphe sur Ω.*

2. *Il existe un ensemble $\mathcal{S}$, discret et fermé dans Ω, tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ et, pour tout $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ et deux fonctions holomorphes $f_1, f_2 : D(z;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ tels que f_2 est non nulle, $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$ et $f = f_1/f_2$ sur $D(z;r[\setminus\{z\}$.*

3. *Il existe un ensemble $\mathcal{S}$, discret et fermé dans Ω, tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ et tel que, pour tout $s \in \mathcal{S}$, il existe $r > 0$ et deux fonctions holomorphes $f_1, f_2 : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ tels que f_2 est non nulle, $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$ et $f = f_1/f_2$ sur $D(s;r[\setminus\{s\}$.*

4. *Il existe un ensemble $\mathcal{S}$, discret et fermé dans Ω, tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ et tel que, pour tout $s \in \mathcal{S}$, il existe $r > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ et une fonction holomorphe $g : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que, sur $D(s;r[\setminus\{s\}$, $f(z) = (z-s)^p g(z)$.*

Démonstration. On procède par implications successives.
$1 \Longrightarrow 2$: Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de singularités isolées de f. On sait que $\mathcal{S}$ est discret et fermé dans Ω et que $\Omega \setminus \mathcal{S}$ est ouvert. Soit $z \in \Omega$.
Cas où $z \in \Omega \setminus \mathcal{S}$: Il existe $r > 0$ tel que $D(z;r[\subset \Omega \setminus \mathcal{S}$ et $f = f_1/f_2$ sur $D(z;r[$, pour $f_1 = f$ et f_2 constante égale à 1. On a $Z(f_2) = \emptyset$ donc $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$.
Cas où $z = s \in \mathcal{S}$ et s est un pôle de f : Par la preuve du 6 du théorème 5.3, il existe $r > 0$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ avec $p < 0$ et il existe une fonction holomorphe $g : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que (5.12) soit vraie. On a le résultat souhaité pour $f_1 = g$ ne s'annulant pas et f_2 donnée par $f_2(z) = (z-s)^{-p}$.
Cas où $z = s \in \mathcal{S}$ et s est une singularité artificielle de f : Par la preuve du 6 du théorème 5.3, il existe $r > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et il existe une fonction holomorphe $g : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que (5.12) soit vraie. On a le résultat souhaité pour f_1 donnée par $f_1(z) = (z-s)^p$ et $f_2 = 1/g$ ne s'annulant pas.
$2 \Longrightarrow 3$: C'est clair.
$3 \Longrightarrow 4$: On prend l'ensemble $\mathcal{S}$ de l'hypothèse. Soit $s \in \mathcal{S}$.
Cas où $f_2(s) \neq 0$: Par continuité de f_2, il existe $r' \in]0;r]$ tel que f_2 ne s'annule pas sur $D(s;r'[$. Par la preuve du 6 du théorème 5.3, il existe $r > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et il existe une fonction holomorphe $g_1 : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que, sur $D(s;r[$, $f_1(z) = (z-s)^p g_1(z)$. On a le résultat souhaité avec $g = g_1/f_2$ ne s'annulant pas.
Cas où $f_2(s) = 0$: Soit $n > 0$ l'ordre de s comme zéro de f_2. Par le théorème des zéros isolés (cf. théorème 3.1), il existe $r > 0$ et une fonction holomorphe $g_2 : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne

s'annulant pas tels que, sur $D(s;r[$, $f_2(z) = (z-s)^n g_2(z)$. Par hypothèse, $f_1(s) \neq 0$ donc, par continuité de f_1, il existe $r' \in]0;r]$ tel que f_1 ne s'annule pas sur $D(s;r'[$. On a donc le résultat souhaité sur $D(s;r'[\backslash\{s\}$ avec $g = f_1/g_2$ et $p = -n$.
$4 \Longrightarrow 1$: Par hypothèse, $f \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$. Soit $s \in \mathcal{S}$. D'après la factorisation de f, $\lim_s |f|$ existe donc, par le 4 du théorème 5.3, s n'est pas une singularité essentielle de f. Donc f est bien méromorphe (cf. définition 5.5). $\square$

On termine ce paragraphe en donnant des méthodes de calcul de résidu pour les fonctions méromorphes.

Proposition 5.7. *Soit Ω un ouvert, f méromorphe sur Ω et s une singularité isolée (donc non essentielle) de f.*

1. *Si s est un pôle simple de f alors* $\mathrm{Res}(f;s) = \lim_{z\to s}(z-s)f(z)$.

$\boxed{\text{S}}$

2. *Si s est un pôle d'ordre $n \geq 1$ de f alors il existe $r > 0$ tel que $(D(s;r[\backslash\{s\}) \ni z \mapsto (z-s)^n f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $D(s;r[$ et*

$$\mathrm{Res}(f;s) \;=\; \lim_s \frac{\tilde{f}^{(n-1)}}{(n-1)!} \;=\; \frac{\tilde{f}^{(n-1)}(s)}{(n-1)!}\,.$$

3. *S'il existe $r > 0$ tel que la restriction de f à $D(s;r[\backslash\{s\}$ soit f_1/f_2, où $f_1, f_2 : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes et s est un zéro d'ordre 1 de f_2. Alors* $\mathrm{Res}(f;s) = f_1(s)/f_2'(s)$.

Démonstration. Par le théorème 5.1, le DSL de f en s est de la forme, pour un $r > 0$ et un $n \geq 1$,

$$\forall\, z \in D(s;r[\backslash\{s\})\,, \quad f(z) \;=\; g(z-s) + \sum_{k=1}^{n} a_{-k}\,(z-s)^{-k} \tag{5.15}$$

et $a_{-1} = \mathrm{Res}(f;s)$.

1. Il s'agit d'un cas particulier du 2, le cas $n = 1$.

2. On a (5.15) pour l'ordre n du pôle s. Donc, pour tout $z \in D(s;r[\backslash\{s\}$, on a

$$(z-s)^n f(z) \;=\; (z-s)^n g(z-s) + \sum_{k=1}^{n} a_{-k}\,(z-s)^{n-k}$$

qui se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $D(s;r[$. De plus

$$\begin{aligned}\forall\, z \in D(s;r[\,, \quad \tilde{f}(z) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\,(z-s)^{n+k} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell-n}\,(z-s)^{\ell} \\ &=\; \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell-n}\,(z-s)^{\ell} + \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{g^{(\ell-n)}(0)}{k!}\,(z-s)^{\ell}\,.\end{aligned}$$

Par unicité du DSE de $\tilde{f}$ en s et par (3.1), on a

$$\frac{\tilde{f}^{(n-1)}(s)}{(n-1)!} \;=\; a_{-1} \;=\; \mathrm{Res}(f;s)\,.$$

3. Par le théorème 4.4, f_2 sont DSE en s donc il existe $r_0 \in]0;r]$ tel que, en utilisant le fait que s est un zéro simple de f_2, pour tout $z \in D(s;r_0[$,

$$f_2(z) \;=\; 0 + f_2'(s)(z-s) + (z-s)\,g_2(z)$$

avec $f_2'(s) \neq 0$ et $g_2(s) = 0$. Par continuité de g_2 en s, il existe $r_1 \in]0;r_0]$ tel que, pour $z \in D(s;r_1[$, $|g_2(z)| \leq |f_2'(s)|/2$. Donc la fonction holomorphe $D(s;r_1[\ni z \mapsto f_2'(s) + g_2(z)$ ne s'annule pas. Par la proposition 1.27, son inverse $\tilde{g}$ est holomorphe sur $D(s;r_1[$ et $f_1\tilde{g}$ l'est aussi. Par le théorème 4.4, $f_1\tilde{g}$ est DSE en s donc il existe $r_2 \in]0;r_1]$ tel que, pour tout $z \in D(s;r_2[$,

$$\frac{f_1}{f_2}(z) \;=\; \frac{1}{z-s}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(f_1\tilde{g})^{(k)}(s)}{k!}(z-s)^k \;=\; \sum_{p=-1}^{+\infty}\frac{(f_1\tilde{g})^{(p+1)}(s)}{(p+1)!}(z-s)^p\,.$$

Par unicité, il s'agit du DSL de f_1/f_2 en s et le résidu de f_1/f_2 en s est le coefficient de $(z-s)^{-1}$ c'est-à-dire $(f_1\tilde{g})(s) = f_1(s)/f_2'(s)$. □

Remarque 5.3. *On revient sur des fonctions considérées dans l'exemple 5.2.*
La fonction f a une singularité artificielle en 0 donc elle admet un prolongement holomorphe sur un disque ouvert centré en 0 (cf. théorème 5.3). Par le théorème 5.1, son résidu en 0 est nul. De même, le résidu de la fonction g en 2 est nul, puisque 2 est une singularité artificielle de g.
Comme g admet un pôle simple en 0, on a, d'après la proposition 5.7,

$$\mathrm{Res}(g;0) \;=\; \lim_{z\to 0} z\,g(z) \;=\; 1\,.$$

Comme g admet un pôle double en 1, on sait, par la proposition 5.7, qu'il existe un $r > 0$ tel que $D(1;r[\setminus\{1\} \ni z \mapsto (z-1)^2 g(z)$ se prolonge en une application holomorphe $\tilde{g} : D(1;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ et que le résidu de g en 1 est $\tilde{g}'(1)$. Pour $|z-1| < r$, on a

$$\tilde{g}(z) \;=\; \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 2}{z\,(z-2)}$$

donc

$$\tilde{g}'(z) \;=\; \frac{\big(3z^2 - 6z + 3)\big)\,z(z-2) - \big(z^3 - 3z^2 + 3z - 2)\big)\,(z - 2 + z)}{z^2\,(z-2)^2}\,.$$

On a donc $\mathrm{Res}(g;1) = \tilde{g}'(1) = 0$.
Sur le DSL en 0 de la fonction h , on lit que son résidu en 0 est $1/(1!) = 1$.

S

5.6 Applications du théorème des résidus.

Commençons par une application directe du théorème des résidus (cf. théorème 5.2). On veut calculer

$$I \;:=\; \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{2z}}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z\,,$$

où $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donné par $\gamma(t) = 4e^{it}$. Les fonctions $g : \mathbb{C} \ni z \mapsto \exp(2z)$ et $h : \mathbb{C} \ni z \mapsto z\sin(z)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. D'après le 2 de l'exemple 5.1 sur le domaine $\mathbb{C}$, le quotient f de g par h est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$. L'ensemble des singularités isolées est $\pi\mathbb{Z}$ (l'ensemble des zéros de h), qui est disjoint de l'image de γ. Comme $\mathbb{C}$ est étoilé, on peut appliquer à f le théorème des résidus (cf. théorème 5.2), ce qui donne (5.9). Comme prévu par ce théorème, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $\pi\mathbb{Z}$ dont l'indice par rapport à γ est non nul. En l'occurence, il y en a 3, tous d'indice 1, à savoir $-\pi$, 0 et π. Donc

$$I \;=\; 2i\pi\left(\mathrm{Res}(f;-\pi) \,+\, \mathrm{Res}(f;0) \,+\, \mathrm{Res}(f;\pi)\right).$$

Il reste à déterminer ces résidus.
On a $h'(z) = \sin(z) + z\cos(z)$ donc $h'(-\pi) = -\pi\cos(-\pi) = \pi = -\pi\cos(pi) = -h'(\pi)$. Donc, comme l'exponentielle ne s'annule pas, $-\pi$ et π sont des pôles simples de f (cf. proposition 5.6). Par le 1 de la proposition 5.7,

$$\mathrm{Res}(f;-\pi) \;=\; \frac{g(-\pi)}{h'(-\pi)} \;=\; \frac{e^{-2\pi}}{\pi} \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}(f;\pi) \;=\; \frac{g(\pi)}{h'(\pi)} \;=\; -\,\frac{e^{2\pi}}{\pi}\,.$$

Comme $h''(z) = 2\cos(z) - z\sin(z)$, $h(0) = h'(0) = 0 \neq h''(0)$. Donc 0 est un zéro double de h et, comme l'exponentielle ne s'annule pas, c'est un pôle double de f (cf. proposition 5.6). On utilise le 2 de la proposition 5.7 pour déterminer le résidu. Pour $z \neq 0$, on a $z^2 f(z) = z\exp(2z)/\sin(z)$, qui se prolonge en une fonction entière $\tilde{f}$. Pour $z \neq 0$, on a, d'après la définition 2.4,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'(z) \;&=\; \frac{\left(\exp(2z) \,+\, 2z\exp(2z)\right)\,\sin(z) \,-\, z\exp(2z)\cos(z)}{\sin^2(z)} \\
&= \frac{\exp(2z)}{\sin^2(z)}\left((1+2z)\,\sin(z) \,-\, z\,\cos(z)\right) \\
&= 2\exp(2z)\,\frac{z}{\sin(z)} \,+\, \frac{\exp(2z)}{\sin^2(z)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \,-\, z\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= 2\exp(2z)\,\frac{z}{\sin(z)} \,+\, \frac{\exp(2z)}{\sin^2(z)}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \,-\, z\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= 2\exp(2z)\,\frac{z}{\sin(z)} \,+\, \frac{z^2\exp(2z)}{\sin^2(z)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(-2n)\,z^{2n-1}\,.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{z\to 0}\sin(z)/z = \sin'(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$, on voit que $\lim_0 \tilde{f} = 2 - 0 = 2$. Par le 2 de la proposition 5.7, $\mathrm{Res}(f;0) = 2$. On en déduit que

$$I \;=\; 2i\pi\left(\frac{e^{-2\pi}}{\pi} + 2 - \frac{e^{2\pi}}{\pi}\right) \;=\; 4i\pi \,-\, 4i\,\mathrm{sh}(2\pi)\,.$$

Le théorème des résidus (cf. théorème 5.2) est très utile pour déterminer la valeur d'intégrales usuelles. On a déjá calculé une telle intégrale dans le paragraphe 4.3 en utilisant la formule de Cauchy générale, qui est un cas particulier du théorème des résidus (cf. remarque 5.1). On donne ici deux autres exemples.

On souhaite calculer l'intégrale

$$I \ := \ \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)} \, .$$

Notons tout de suite que la fonction $[0;2\pi] \ni t \mapsto 1/(2+\sin(t))$ est bien définie et continue, puisque, pour $t \in [0;2\pi]$, $|\sin(t)| \leq 1$. En écrivant $\sin(t)$ comme la partie imaginaire de e^{it}, on a

$$I \ = \ \int_0^{2\pi} \frac{2i}{4i \, + \, \mathrm{e}^{it} \, - \, \mathrm{e}^{-it}} \, \mathrm{d}t \ = \ \int_0^{2\pi} \frac{2i\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{i2t} \, + \, 4i\mathrm{e}^{it} \, - \, 1} \, \mathrm{d}t \, .$$

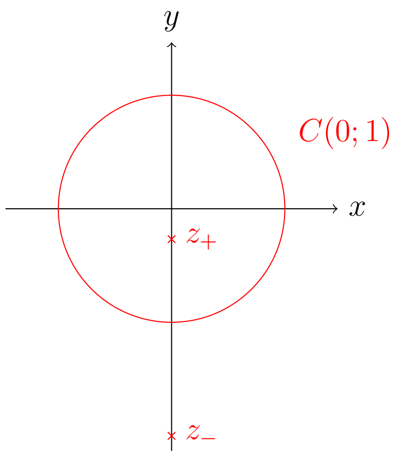
On interprète I comme l'intégrale le long du chemin fermé $\gamma : [0;2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$, qui est de classe C^1 (cf. corollaire 2.4), de la fonction f, définie dans $\mathbb{C}$, par $f(z) = 2/(z^2+4iz-1)$. Comme, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 \, + \, 4iz \, - \, 1 \ = \ (z+2i)^2 \, + \, 3 \ = \ \big(z \, + \, 2i \, + \, i\sqrt{3}\big)\big(z \, + \, 2i \, - \, i\sqrt{3}\big) \, ,$$

et comme $z_- := -2i - i\sqrt{3}$ et $z_+ := -2i + i\sqrt{3}$ n'appartiennent pas à $C(0;1) = \gamma([0;2\pi])$, la fonction f est bien continue sur $\gamma([0;2\pi])$ et on a bien

$$I \ = \ \int_0^{2\pi} \frac{2}{\mathrm{e}^{i2t} \, + \, 4i\mathrm{e}^{it} \, - \, 1} \, i\mathrm{e}^{it} \, \mathrm{d}t \ = \ \int_0^{2\pi} f\big(\gamma(t)\big) \, \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \ = \ \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \, .$$

Par quotient (cf. proposition 1.27), f est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$, qui est étoilé, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S} = \{z_-; z_+\}$, qui est discret et fermé dans $\mathbb{C}$. On peut donc appliquer le théorème des résidus (cf. théorème 5.2) pour calculer I.
Comme $|z_-| = 2+\sqrt{3} > 1$ et $|z_+| = 2-\sqrt{3} < 1$, on a, d'après la proposition 2.9, $\mathrm{Ind}(\gamma; z_-) = 0$ et $\mathrm{Ind}(\gamma; z_+) = 1$. (On aurait pu calculer ces indices avec la méthode pratique vue en TD).



Il reste à calculer le résidu de f en z_+. D'après la factorisation précédente du dénominateur, z_+ en est un zéro simple. On applique le point 1 (ou le 3) de la proposition 5.7. On a donc

$$\mathrm{Res}(f; z_+) \ = \ \frac{2}{z_+ \, - \, z_-} \ = \ \frac{1}{i\sqrt{3}} \, .$$

D'où $I = 2i\pi \times 1/(i\sqrt{3}) = (2\pi)/\sqrt{3}$, qui est un réel positif, ce qui est normal puisque I est une intégrale usuelle d'une fonction réelle et positive.

Remarque 5.4. *Avec le même type de raisonnement, on peut calculer des intégrales du type*

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos(t);\, \sin(t))}{Q(\cos(t);\, \sin(t))}\, \mathrm{d}t\,,$$

où P, Q sont des polynômes de deux variables. Vous avez vu en L1 qu'on pouvait calculer ce type d'intégrale avec un changement de variables de la forme $u = \tan(t/2)$, $u = \cos(t)$, $u = \sin(t)$ ou $u = \tan(t)$ (règles de Bioche). Essayez d'appliquer cette méthode ici et comparez avec le calcul effectué ci-dessus.

On termine par le calcul, pour $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, de

$$I_n \;:=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^n}\,.$$

Comme n est pair, le dénominateur ne s'annule pas donc la fonction à intégrer est continue. De plus, pour $|x| \geq 1$, on a $(1 + x^n)^{-1} = O(x^{-2})$ et les intégrales de Riemann

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

convergent. Donc I est absolument convergente, par comparaison.
Là encore, on voit une méthode en L1 qui permet de calculer ce type d'intégrales. La fonction $f(x) = 1/(1+x^n)$ est une fraction rationnelle. Il "suffit" donc de factoriser $1+x^n$ en produit de facteurs irréductibles et de décomposer f en éléments simples. Pour n assez petit, disons 2 ou 4, ça se fait assez bien mais si $n = 14$, par exemple, ce n'est plus aussi simple. C'est surtout très fastidieux.
On contourne ici cette difficulté en utilisant le théorème des résidus (cf. théorème 5.2). Comme l'intégrale a lieu sur un intervalle non borné, on doit l'approcher par des intégrales sur un segment afin de pouvoir utiliser le théorème des résidus. Puisque l'intégrale I converge, $I = \lim_{R\to+\infty} I_R$ avec

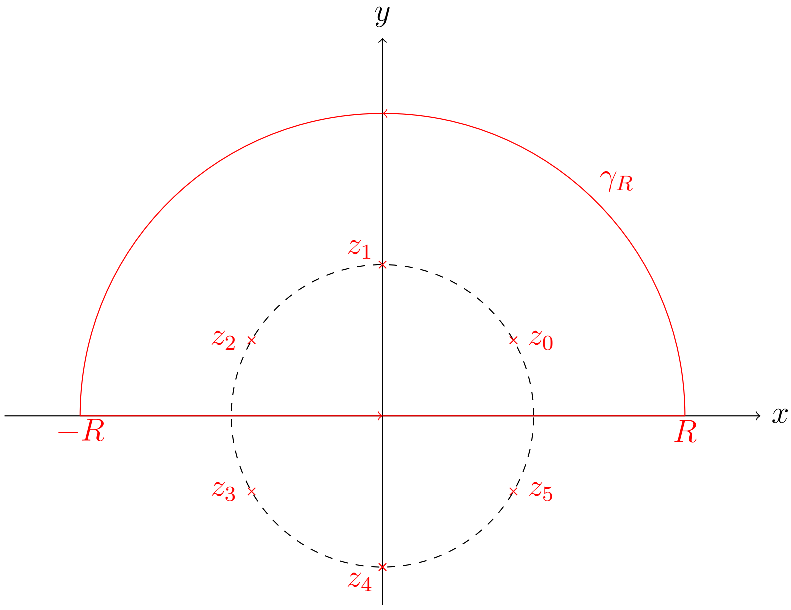
$$I_R \;:=\; \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^n}\,.$$

Soit f la fonction définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = (1 + z^n)^{-1}$. Par quotient (cf. proposition 1.27), f est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$, qui est étoilé, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$ égal à l'ensemble des racines $n$ièmes de -1 : $\mathcal{S} = \{z_k\,;\ 0 \leq k \leq n-1\}$ avec

$$z_k \;=\; \exp\bigl(i\pi/n \,+\, 2ik\pi/n\bigr)\,.$$

En particulier, $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{S} \cap \mathbb{R} = \emptyset$, puisque l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, donnée par $x^n = -1$, n'a pas de solution. De plus, pour tout k, z_k est un pôle simple de f car z_k n'annule pas la dérivée du dénominateur de f. Pour $R > 1$, soit Γ_R la concaténation des chemins C^1 $\psi_{-R;R}$ et $\gamma_R : [0;\pi] \ni t \mapsto Re^{it}$. On fait le dessin de la situation dans le cas

$n = 6$.



On a

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\psi_{-R;R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; I_R + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{5.16}$$

Pour $z \in \mathcal{S}$, on a $\mathrm{Ind}(\Gamma_R; z) = 0$, si $\mathrm{Im}(z) < 0$, et $\mathrm{Ind}(\Gamma_R; z) = 1$, si $\mathrm{Im}(z) > 0$ (cf. la méthode de calcul d'indice du TD). Par le théorème des résidus (cf. théorème 5.2), on a (5.9) qui se réduit à

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{k=0}^{(n/2)-1} \mathrm{Res}(f;\, z_n)\,.$$

Pour $0 \le k \le (n/2) - 1$, on applique le point 3 de la proposition 5.7 pour obtenir

$$\mathrm{Res}(f;\, z_k) \;=\; \frac{1}{n z_k^{n-1}} \;=\; \frac{e^{-i\pi\frac{(n-1)(2k+1)}{n}}}{n} \;=\; \frac{(-1)^{2k+1}\, e^{i\pi(2k+1)/n}}{n} \;=\; -\,\frac{e^{i\pi(2k+1)/n}}{n}\,.$$

Donc, puisque $2i\pi/n \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;&=\; -\,\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{(n/2)-1} e^{i\pi(2k+1)/n} \;=\; -\,\frac{2i\pi\, e^{i\pi/n}}{n} \sum_{k=0}^{(n/2)-1} (e^{2i\pi/n})^k \\
&= -\,\frac{2i\pi\, e^{i\pi/n}}{n}\,\frac{1 - (e^{2i\pi/n})^{n/2}}{1 - e^{2i\pi/n}} \;=\; -\,\frac{4i\pi\, e^{i\pi/n}}{n\,(1 - e^{2i\pi/n})} \;=\; \frac{-2\pi\, 2i}{n\,(e^{-i\pi/n} - e^{i\pi/n})} \\
&= \frac{2\pi}{n\,\sin(\pi/n)}\,,
\end{aligned}$$

qui est indépendant de R. Par ailleurs, on a, pour $R > 1$,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;=\; \left|\int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{1 + R^n e^{int}}\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_0^\pi \frac{R}{|1 + R^n e^{int}|}\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{R\,\pi}{R^n - 1}\,.$$

Pour la dernière inégalité, on a utilisé : pour tout $t \in [0;\pi]$, $R^n = |R^n e^{int}| \leq |1 + R^n e^{int}| + 1$ donc $|1 + R^n e^{int}| \geq R^n - 1 > 0$. Comme $n > 1$, le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0, quand $R \to +\infty$, donc

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,,$$

par le théorème des gendarmes. En passant à la limite $R \to +\infty$ dans (5.16), on obtient

$$\frac{2\pi}{n\,\sin(\pi/n)} \;=\; I\,.$$