Cours : partie du chapitre 5 qui est au programme de l'examen.

Théorème des résidus. Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. On considère deux fonctions f et g, holomorphes sur Ω, la fonction g étant non nulle. On note par $Z(g)$ l'ensemble des zéros de g et on considère $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega \setminus Z(g)$ un chemin fermé. Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{g(w)}\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{s\,\in\,Z(g)} \mathrm{Rés}\,(f/g;s)\,\mathrm{Ind}\,(\gamma;s)\,,$$

la somme étant finie car l'ensemble $\{s \in Z(g)\,;\ \mathrm{Ind}(\gamma;s) \neq 0\}$ l'est.
Pour chaque $s \in Z(g)$, on a noté par $\mathrm{Rés}(f/g;s)$ le résidu de f/g en s (cf. le cours pour une définition) et par $\mathrm{Ind}(\gamma;s)$ l'indice de s par rapport au chemin γ.

Détermination de résidu. Dans le cadre du théorème précédent, on a :

1. Si s est un zéro simple de g alors $\mathrm{Rés}\,(f/g;s) = \lim\limits_{z\to s}(z-s)f(z)/g(z)$.
2. Si s est un zéro simple de g alors $\mathrm{Rés}\,(f/g;s) = f(s)/g'(s)$.
3. Si s est un zéro d'ordre $n \geq 1$ de g alors il existe $r > 0$ tel que $(D(s;r[\setminus\{s\}) \ni z \mapsto (z-s)^n f(z)/g(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe h sur $D(s;r[$ et

   $$\mathrm{Rés}\,(f/g;s) \;=\; \lim_s \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!} \;=\; \frac{h^{(n-1)}(s)}{(n-1)!}\,,$$

   où $h^{(n-1)}$ désigne la $\mathbb{C}$-dérivée $(n-1)$-ième de h.