Complément d'Algèbre 2

Méthode de "variation des constantes" pour les équations diff. du second ordre sur un exemple.

Résoudre l'éq. (e) : $y'' - y = 2t$, sur $\mathbb{R}$, (sol. réelles).

On vérifie que $S_0 = \{ k_+ y_+ + k_- y_- \,;\, (k_+ ; k_-) \in \mathbb{R}^2 \}$

où, pour $\sigma = \{-;+\}$, $y_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto e^{\sigma t}$.

Par le cours,

$S = \{ y_P + y \,;\, y \in S_0 \}$

où y_P est une sol. de (e).

On cherche y_P sous la forme

$y_P(t) = u_+(t)\, y_+(t) + u_-(t)\, y_-(t)$,

par des fonct. dérivables u_+ et u_-.

On <u>admet</u> que

$$y_P \in S \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad (*) \left\{ \begin{array}{l} u_+'(t) y_+(t) + u_-'(t) y_-(t) = 0 \\ \text{et} \\ u_+'(t) y_+'(t) + u_-'(t) y_-'(t) = 2t \end{array} \right.$$

On a

$$(*) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} u_+'(t) e^{t} + u_-'(t) e^{-t} = 0 \\ \text{et} \\ u_+'(t) e^{t} - u_-'(t) e^{-t} = 2t \end{array} \right.$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2u_+'(t) e^{t} = 2t \\ \text{et} \\ 2u_-'(t) e^{-t} = -2t \end{array} \right.$$

$(*) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u_+'(t) = te^{-t} \\ \text{et} \\ u_-'(t) = -te^{t} \end{cases}$ $(**)$.

Pour $\sigma \in \{-;+\}$, on a

$$\int^t ue^{\sigma u}\,du = \left[u\,\sigma e^{\sigma u}\right]^t - \int^t \sigma e^{\sigma u}\,1\,du$$
$$= \sigma te^{\sigma t} - e^{\sigma t} + \underline{cte}.$$

Soit $u_+ : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -te^{-t} - e^{-t} \end{array}$ et $u_- : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -te^{t} + e^{t} \end{array}$,

$(**)$ est valide donc, par les équiv. précédentes,

$y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (-t-1)e^{-t} \times e^{t} + (1-t)e^{t} \times e^{-t} = -2t \end{array}$

est sol. de $(\mathcal{E})$.