Complément d'Algèbre 2.

Notion d'espace vectoriel.

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de ses addition et multiplication habituelles
<u>ou</u> l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de ses addition et multiplication habituelles.

On dit qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si cet ensemble est muni d'une loi de composition interne $\oplus$ et d'une loi de composition externe $\odot$ telles les propriétés suivantes sont satisfaites :

- la loi $\oplus : E \times E \to E$ est commutative, associative, admet un élément neutre noté 0_E ;
- tout élément de E admet un symétrique pour $\oplus$ (appelé un "opposé") ;
- la loi $\odot : \mathbb{K} \times E \to E$ est distributive par rapport à $\oplus$ et aussi par rapport à l'addition $+$ de $\mathbb{K}$, elle est associative et $1_{\mathbb{K}}$, l'élément neutre de la multiplication $\times$ de $\mathbb{K}$, est élément neutre pour $\odot$.

Détails des propriétés :

- $\oplus$ est commutative si
  $\forall (u, v) \in E^2, \quad u \oplus v = v \oplus u$.
- $\oplus$ est associative si
  $\forall (u; v; w) \in E^3, \quad (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$.

– 0_E est élément neutre pour $\oplus$ si

$\forall u \in E, \quad u \oplus 0_E = 0_E \oplus u = u$.

– Pour $u \in E$, un opposé de u est un élément $v \in E$ tq. $\quad u \oplus v = v \oplus u = 0_E$

– $\odot$ est distributive par rapport à $\oplus$ si

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u;v) \in E^2, \quad \lambda \odot (u \oplus v) = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v)$.

– $\odot$ est distributive par rapport à $+$ si

$\forall (\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, \quad (\lambda + \mu) \odot u = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v)$.

– $\odot$ est associative si

$\forall (\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, \quad (\lambda \times \mu) \odot u = \lambda \odot (\mu \odot u)$.

– 1_K est élément neutre pour $\odot$ si

$\forall u \in E, \quad 1_K \odot u = u$.

Exemples d'espaces vectoriels :

– $(\mathbb{K};+;\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension 1) avec les lois "$\oplus = +$" et "$\odot = \times$".

– Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $(\mathbb{K}^n; \oplus; \odot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension n) avec les lois $\oplus : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ et $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définies par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} := \begin{pmatrix} z_1 + z'_1 \\ \vdots \\ z_n + z'_n \end{pmatrix}$$

et

$$\underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{K}} \odot \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} := \begin{pmatrix} \lambda \times z_1 \\ \vdots \\ \lambda \times z_n \end{pmatrix}.$$

- Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit

$$\mathcal{F}(I;\mathbb{K}) = \{ f : I \to \mathbb{K} \}.$$

On définit les lois $\oplus : \mathcal{F}(I;\mathbb{K})^2 \to \mathcal{F}(I;\mathbb{K})$ et $\odot : \mathbb{K} \times \mathcal{F}(I;\mathbb{K}) \to \mathcal{F}(I;\mathbb{K})$ par, pour $(f;g) \in \mathcal{F}(I;\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f \oplus g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto f(t)+g(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda \odot f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \lambda \times f(t) \end{array}.$$

Soit $0_I : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto 0_{\mathbb{K}} \end{array}$ la fonction nulle sur I.

C'est l'élément neutre de $\oplus$.

Pour $f \in \mathcal{F}(I;\mathbb{K})$, la fonction $g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto (-1) \times f(t) \end{array}$ est l'opposé de f.

On vérifie que toutes les propriétés définissant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont valides pour $(\mathcal{F}(I;\mathbb{K}) ; \oplus ; \odot)$.

<u>Notation</u> : pour alléger les notations, on écrit "$+$" à la place de "$\oplus$" et "$\cdot$" à la place de "$\odot$", malgré la confusion possible avec les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{K}$. De même, on note souvent λf au lieu de $\lambda \odot f$.

On admet que $(\mathcal{F}(I;\mathbb{K}); + ; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

D'après les résultats établits en Analyse 1 au L1 S1, les ensembles

$\mathcal{C}^0(I;\mathbb{K}) = \{ f : I \to \mathbb{K} \,;\, f \text{ continue} \}$,

$\mathcal{D}(I;\mathbb{K}) = \{ f : I \to \mathbb{K} \,;\, f \text{ dérivable} \}$,

$\mathcal{C}^1(I;\mathbb{K}) = \{ f : I \to \mathbb{K} \,;\, f \text{ dérivable et } f' \text{ continue} \}$,

sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{F}(I;\mathbb{K});+;\cdot)$.

On admet qu'ils sont tous de dimension infinie.

<u>Rq.</u> : $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{D}(I;\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{C}^0(I;\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{F}(I;\mathbb{K})$.

Dans le cours d'Algèbre 2, les ensembles de solutions réelles (resp. complexes) des équations différentielles <u>homogènes</u> sur I considérées sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{F}(I;\mathbb{R});+;\cdot)$ (resp. $(\mathcal{F}(I;\mathbb{C});+;\cdot)$) de dimension 1 pour les équations du 1er ordre et de dimension 2 pour celles du 2nd ordre.

Les ensembles de solutions réelles (resp. complexes) des éq. diffé. <u>avec</u> second membre considérées sont des sous-ensembles de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{F}(I;\mathbb{C})$) mais, en général, ils ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{F}(I;\mathbb{R}),+;\cdot)$ (resp. $(\mathcal{F}(I;\mathbb{C});+;\cdot)$).

Exemples :

* Trouver toutes les solutions réelles de l'équation différentielle (e) : $y'-y=0$, sur $\mathbb{R}$.

Par le cours, l'ensemble S_0 de ces solutions est

$$S_0 = \{ k \odot y_0 \,;\, k \in \mathbb{R} \} \quad \text{où} \quad y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t \end{array}.$$

On peut réécrire S_0 de la façon suivante, d'après la définition de $\odot$,

$$S_0 = \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto k \times y_0(t) \end{array} \,;\, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

* Trouver toutes les solutions complexes de l'équation différentielles (f) : $y'-iy=1$, sur $\mathbb{R}$.

Par le cours,

$$S_0 = \{ k \odot y_0 \,;\, k \in \mathbb{C} \} \quad \text{où} \quad y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{array}$$

et $S = \{ y_p \oplus y \,;\, y \in S_0 \} = \{ y_p \oplus (k \odot y_0) \,;\, k \in \mathbb{C} \}$

où $y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto i \end{array}$.

* Trouver toutes les solutions réelles de l'équation différentielle (g) : $y''+y=2$, sur $\mathbb{R}$.

Par le cours, $S_0 = \{ (k_1 \odot y_1) \oplus (k_2 \odot y_2) \,;\, (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

où $y_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(t) \end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(t) \end{array}$

et

$S = \{ y_p \oplus y \,;\, y \in S_0 \} = \{ y_p \oplus (k_1 \odot y_1) \oplus (k_2 \odot y_2) \,;\, (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

où $y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 2 \end{array}$.