Polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Ici, $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : * Un polynôme sur $\mathbb{K}$ est une suite "presque nulle" d'éléments de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N} \cap [N ; +\infty[, \ a_n = 0.$$

* Soit $\mathcal{P} = \{\text{polynômes sur } \mathbb{K}\}$ (notation provisoire).

* Pour $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ et $m \in \mathbb{N}$, a_m est le coefficient d'indice m de P.

On munit $\mathcal{P}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

- Pour $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose

$$P \oplus Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}.$$

$\oplus : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est l'addition de $\mathcal{P}$.

"Graphiquement" :

$$P = (a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; \text{-----})$$
$$Q = (b_0 ; b_1 ; b_2 ; b_3 ; \text{-----})$$
$$P \oplus Q = (a_0+b_0 ; a_1+b_1 ; a_2+b_2 ; a_3+b_3 ; \text{-----})$$

– On définit aussi une multiplication externe par des éléments de $\mathbb{K}$:

$$\odot : \mathbb{K} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

par, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$,

$$\lambda \odot P = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}.$$

"Graphiquement" :

$$P = (a_0 ; a_1 ; a_2 ; \text{----})$$

$$\lambda \odot P = (\lambda a_0 ; \lambda a_1 ; \lambda a_2 ; \text{----})$$

On pose

$$0_{\mathcal{P}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} = (0 ; 0 ; 0 ; 0 ; \text{——}).$$

On vérifie que $(\mathcal{P} ; \oplus ; \odot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $0_{\mathcal{P}}$ comme élément neutre pour $\oplus$.

– On définit aussi une multiplication <u>interne</u> dans $\mathcal{P}$:

$$\otimes : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

par, pour $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$P \otimes Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell} b_\ell = \sum_{\substack{(i;j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j .$$

"Graphiquement" : $n \in \mathbb{N}$

$$P = (a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_n ; \dots)$$

$$Q = (b_0 ; b_1 ; b_2 ; b_3 ; \dots ; b_n ; \dots)$$

On somme tous ces produits pour obtenir c_n.

On vérifie que $\otimes$ est associative, commutative, distributive sur $\oplus$ et qu'elle a pour élément neutre :

$$1_S := (1 ; 0 ; 0 ; 0 ; \dots)$$
$$:= (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } d_n = 0 \text{ si } n \neq 0 \text{ et } d_0 = 1.$$

On dit que $(S ; \oplus ; \otimes ; \odot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Soit

$$X = (0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; \dots)$$
$$= (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } c_n = 0 \text{ si } n \neq 1 \text{ et } c_1 = 1.$$

On vérifie par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$X^p = (0 ; \dots ; 0 ; \overset{p\text{ième}}{1} ; 0 ; 0 ; \dots)$$
$$= (e_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } e_n^{(p)} = 0 \text{ si } n \neq p \text{ et } e_n^{(n)} = 1.$$

$$\left(\hookrightarrow X^p = \underbrace{X \otimes X \otimes \dots \otimes X}_{p \text{ fois}} \right).$$

On vérifie que la famille $(X^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{P}$.

Comme cette famille est infinie, la dimension de l'esp. vect. $\mathcal{P}$ est infinie.

Pour $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$, on a

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$ (la somme portant sur un nombre finis de termes non nuls)

cette écriture est <u>unique</u>.

<u>Notations</u> : On écrit $\mathcal{P} = \mathbb{K}[X]$

et on note les lois de $\mathcal{P}$ de la m̂ façon que celles de $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}[X]$ est la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à une indéterminée (c'est X) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

<u>Fonctions polynômes</u> :

ens. des fonct. de $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$

Soit $\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \longmapsto \varphi(P) : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi(P)$ est la fonction polynôme associée à P.

On peut vérifier que l'application φ est <u>injective</u>.