Compléments pour le L1.

Dans les livres concernant les mathématiques à l'université, il est rare que les ensembles de nombres usuels soient construits. Dans ce complément, on donne sous forme d'exercices une contruction des ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels donné par les axiomes de Peano. On vérifie une certain nombre de propriétés de ces ensembles.

Préliminaires.

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux ensembles. Un graphe fonctionnel dans $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est une partie G de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathcal{E}\ ,\ \exists y \in \mathcal{F}\ ;\ (x; y) \in G$$

et

$$\forall x \in \mathcal{E}\ ,\ \forall (y; z) \in \mathcal{F}^2\ ,\ \Big(\big((x; y) \in G \text{ et } (x; z) \in G \big) \implies y = z \Big)\ .$$

Un tel graphe définit une application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ qui, à $x \in \mathcal{E}$, associe l'unique $y \in \mathcal{F}$ tel que $(x; y) \in G$.
Une partie G de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{E}$ de la façon suivante : étant donnés x et y dans $\mathcal{E}$, on dit que x est en relation avec y par $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$, si $(x; y) \in G$.
Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{E}$ est une relation binaire sur $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathcal{E}\ ,\ x\mathcal{R}x\ ,\\
&\forall (x; y) \in \mathcal{E}^2\ ,\ \big(x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x \big)\ ,\\
&\forall (x; y; z) \in \mathcal{E}^3\ ,\ \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \big) \implies x\mathcal{R}z \Big)\ .
\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathcal{E}$, la classe de x relativement à une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est l'ensemble des $y \in \mathcal{E}$ tels que $x\mathcal{R}y$. On la note $\overline{x}$ ou bien $\mathcal{C}(x)$ ou encore $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$. On admet que les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble $\mathcal{E}$. L'ensemble des classes d'équivalence est appelé quotient de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{R}$ et est noté $\mathcal{E}/\mathcal{R}$.
Une relation binaire $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathcal{E}\ ,\ x\mathcal{T}x\ ,\\
&\forall (x; y) \in \mathcal{E}^2\ ,\ \Big(\big(x\mathcal{T}y \text{ et } y\mathcal{T}x \big) \implies x = y \Big)\ ,\\
&\forall (x; y; z) \in \mathcal{E}^3\ ,\ \Big(\big(x\mathcal{T}y \text{ et } y\mathcal{T}z \big) \implies x\mathcal{T}z \Big)\ .
\end{aligned}$$

On dit que $\mathcal{T}$ définit un ordre total sur $\mathcal{E}$ si tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont comparables (via $\mathcal{T}$), c'est-à-dire si, pour tout $(x; y) \in \mathcal{E}^2$, on a $x\mathcal{T}y$ ou(et) $y\mathcal{T}x$.

Propriétés de $\mathbb{N}$.

On se propose de déduire des propriétés usuelles de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ des axiomes de Peano suivants.

Axiomes de Peano : on postule l'existence d'un triplet $(0, \mathbb{N}, S)$, où $\mathbb{N}$ est un ensemble, 0 un élément particulier de $\mathbb{N}$ et $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application qui vérifient :

- P1 : S est injective.
- P2 : $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\} =: \mathbb{N}^*$.
- P3 : Si A est une partie de $\mathbb{N}$ telle que $0 \in A$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad (n \in A) \Longrightarrow (S(n) \in A)\,,$$
alors $A = \mathbb{N}$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, 0 est l'élément zéro, S est l'application "successeur" et P3 est l'axiome de récurrence.

1. Montrer le théorème de récurrence suivant. Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Les assertions $(\mathcal{P}(0))$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(S(n)))$ impliquent $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n))$.

2. On montre maintenant le résultat suivant. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide, $b \in \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application. Il existe une unique application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $\phi(0) = b$ et $\phi \circ S = g \circ \phi$.
On considère l'application $h : \mathbb{N} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathcal{E}$ définie par $h(x, y) = (S(x), g(y))$. On note par $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{N} \times \mathcal{E}$ vérifiant $h(A) \subset A$ et $(0, b) \in A$. On pose $G = \cap_{A \in \mathcal{F}} A$. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des $x \in \mathbb{N}$ tels que $G_x := \{y \in \mathcal{E}; (x, y) \in G\}$ soit un singleton. Nous allons montrer que G est le graphe d'une application ϕ qui répond à la question.

   (a) En utilisant le 1., montrer l'unicité de ϕ.

   (b) Vérifier que $\mathcal{F}$ est non vide (donc G est une partie de $\mathbb{N} \times \mathcal{E}$).

   (c) Montrer, en utilisant le 1., que $pr_1(G) = \mathbb{N}$ ($pr_1 : \mathbb{N} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N}$ étant la première projection).

   (d) Soit $c \in \mathcal{E}$ tel que $(0, c) \in G$. Soit $B = \{(0, b)\} \cup h(G)$. Montrer que $B \in \mathcal{F}$. En déduire que $(0, c) \in B$. Conclure que $G_0 = \{b\}$ (donc $0 \in \mathcal{U}$).

   (e) Vérifier que $B = G$.

   (f) Pour $x \in \mathcal{U}$, montrer que $G_{S(x)} \neq \emptyset$. Soit $y \in G_{S(x)}$, montrer que $(S(x), y) \in h(G)$. Pour $y_1, y_2 \in G_{S(x)}$, on peut donc trouver $(x_1', y_1') \in G$ et $(x_2', y_2') \in G$ tels que $(S(x), y_i) = h(x_i', y_i')$, pour $i \in \{1; 2\}$. Montrer que $x_1' = x_2'$. En déduire que $y_1' = y_2'$. Conclusion ?

(g) Montrer, en utilisant le 1., que G est un graphe fonctionnel.

(h) Soit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application de graphe G. Vérifier que ϕ convient.

3. Soit $\psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $\tilde{g} : \mathcal{D} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ deux applications. Déduire du 2., qu'il existe une unique application $\tilde{\phi} : \mathcal{D} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que

$$\forall d \in \mathcal{D}\,, \quad \tilde{\phi}(d,0) \;=\; \psi(d)\,, \tag{1}$$
$$\forall d \in \mathcal{D}\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \tilde{\phi}(d,S(n)) \;=\; \tilde{g}(d,\tilde{\phi}(d,n))\,. \tag{2}$$

4. Déduire du résultat précédent qu'il existe une unique application, notée $+$, de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad n+0 \;=\; n\,, \tag{3}$$
$$\forall p \in \mathbb{N}\,, \forall q \in \mathbb{N}\,, \quad p+S(q) \;=\; S(p+q)\,. \tag{4}$$

A partir de ce résultat, on vérifie facilement par récurrence que $+$ est associative, commutative et que tout élément est simplifiable. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = n+1$, où $1 := S(0)$.

5. Déduire du 3., qu'il existe une unique application, notée $\cdot$, de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad n \cdot 0 \;=\; 0\,, \tag{5}$$
$$\forall p \in \mathbb{N}\,, \forall q \in \mathbb{N}\,, \quad p \cdot (q+1) \;=\; (p \cdot q) + p\,. \tag{6}$$

Là aussi, il est facile de déduire de ce résultat les propriétés usuelles de la multiplication (associativité, commutativité, distributivité sur $+$, 1 est élément neutre, tout élément non nul est simplifiable).

6. Déduire du 3., qu'il existe une unique application, appelée exponentiation et notée $(a,b) \mapsto a^b$, de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad n^0 \;=\; 1\,, \tag{7}$$
$$\forall p \in \mathbb{N}\,, \forall q \in \mathbb{N}\,, \quad p^{(q+1)} \;=\; (p^q) \cdot p\,. \tag{8}$$

7. Montrer que la relation binaire "$a \leq b$ ssi il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $b = a+d$" définit un ordre total sur $\mathbb{N}$.

Construction de l'ensemble des entiers relatifs.

Sur $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par : $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ ssi $a+b' = a'+b$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On pose $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2/\mathcal{R}$, c'est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

2. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\phi(n) = \mathcal{C}((n,0))$ (la classe de $(n,0)$) est injective. $\mathbb{N}$ est donc en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$. On identifie $\mathbb{N}$ à cette partie.

3. On définit sur $\mathbb{Z}$ l'addition suivante :

$$\forall\big((a,b),(a',b')\big) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2\,, \quad \mathcal{C}((a,b)) \,+\, \mathcal{C}((a',b')) \;:=\; \mathcal{C}((a+a',b+b'))\,.$$

   Montrer que cette application est bien définie.

4. Montrer que $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe abélien d'élément neutre $\mathcal{C}((0,0))$. On note par $-s$ l'opposé de $s \in \mathbb{Z}$.

5. On définit sur $\mathbb{Z}$ la multiplication suivante :

$$\forall\big((a,b),(a',b')\big) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2\,, \quad \mathcal{C}((a,b)) \,\cdot\, \mathcal{C}((a',b')) \;:=\; \mathcal{C}((aa'+bb',ab'+a'b))\,.$$

   Montrer que cette application est bien définie. Montrer qu'elle est associative, commutative, distributive sur l'addition et que $\mathcal{C}((1,0))$ est son élément neutre. $\mathbb{Z}$ est donc un anneau commutatif.

6. Montrer que la relation binaire "$a \leq b$ ssi $(-a)+b \in \phi(\mathbb{N})$" définit un ordre total sur $\mathbb{Z}$ qui prolonge celui de $\mathbb{N}$.

Construction de l'ensemble des rationnels.

Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par : $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ ssi $ab' = a'b$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On pose $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{R}$, c'est l'ensemble des nombres rationnels.

2. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $\phi(n) = \mathcal{C}((n,1))$ (la classe de $(n,1)$) est injective. $\mathbb{Z}$ est donc en bijection avec une partie de $\mathbb{Q}$. On identifie $\mathbb{Z}$ avec cette partie. On note l'élément $\mathcal{C}((a,b))$ de $\mathbb{Q}$ par a/b. Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}$, $n/1$ représente n vu dans $\mathbb{Q}$.

3. On définit sur $\mathbb{Q}$ l'addition suivante :

$$\forall\big((a,b),(a',b')\big) \in \big(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\big)^2\,, \quad \frac{a}{b} \,+\, \frac{a'}{b'} \;:=\; \frac{ab'+a'b}{bb'}\,.$$

   Montrer que cette application est bien définie. On note encore par 0 l'élément $0/1$.

4. On définit sur $\mathbb{Q}$ la multiplication suivante :

$$\forall\big((a,b),(a',b')\big) \in \big(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\big)^2\,, \quad \frac{a}{b} \,\cdot\, \frac{a'}{b'} \;:=\; \frac{aa'}{bb'}\,.$$

   Montrer que cette application est bien définie. On note encore par 1 l'élément $1/1$.

5. Montrer que $(\mathbb{Q},+)$ est un groupe abélien. Montrer que $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ est un anneau commutatif. Vérifier que $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ est un groupe ($\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$).

On a donc contruit le corps des nombres rationnels. Il est possible de mettre sur $\mathbb{Q}$ un ordre qui prolonge celui de $\mathbb{Z}$.

Ordre total sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que si $a/b \in \mathbb{Q}$ avec $ab \in \mathbb{N}$ alors, pour tout $(a', b') \in a/b$, on a $a'b' \in \mathbb{N}$. On peut donc définir le sous-ensemble $\mathbb{Q}^+$ de $\mathbb{Q}$ des rationnels dont un représentant (a, b) vérifie $ab \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{Q}^{+*} := \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$.

2. Montrer que la relation binaire “$a/b \leq a'/b'$ ssi $a/b - a'/b' \in \mathbb{Q}^+$” définit un ordre total sur $\mathbb{Q}$.

3. Vérifier que $\mathbb{Q}$ est archimédien c'est-à-dire que la propriété suivante est vraie.
$$\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^{+*} \times \mathbb{Q}\,, \exists n \in \mathbb{N}\,; \quad n \cdot a \;\geq\; b\,.$$

4. Vérifier que $\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire que la propriété suivante est vraie. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$, il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.

Bien sûr, on peut définir sur $\mathbb{Q}$ une valeur absolue par $|q| = \max(q, -q)$. Elle prolonge celle de $\mathbb{Z}$ et on a les propriétés suivantes : $|q| = 0 \iff q = 0$, $|qq'| = |q|\,|q'|$ et $|q+q'| \leq |q|+|q'|$.

Une construction de $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites de rationnels (i.e. $\mathcal{S} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$). On note par $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des suites de Cauchy et par $\mathcal{C}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé des suites convergeant vers 0. On rappelle que $\mathcal{S}$, muni de l'addition $(u_n)_n + (v_n)_n = (u_n + v_n)_n$, est un groupe abélien dont l'élément neutre est la suite nulle.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ muni de la (restriction de la) loi $+$ précédente est un groupe. On dit que c'est un sous-groupe de $\mathcal{S}$. Montrer que $\mathcal{C}_0$ est aussi un sous-groupe de $\mathcal{S}$.

2. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathcal{C}$ définie par : $x\mathcal{R}y \iff x-y \in \mathcal{C}_0$. Montrer qu'il s'agît d'une relation d'équivalence. On note par $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{R}$ sa projection canonique.

3. On définit sur le quotient $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ une addition par $\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y)$. Vérifier qu'elle est bien définie et que $\mathcal{C}/\mathcal{R}$, muni de cette loi, est un groupe abélien.

4. Soit $J : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{S}$, qui à $q \in \mathbb{Q}$ associe la suite constante égale à q. Montrer que J est injective et que $J(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{C}$. Montrer que l'application $I = \pi \circ J$ est injective. On identifiera donc $\mathbb{Q}$ avec $I(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{C}/\mathcal{R}$.

5. Soit $\leq'$ la relation binaire sur $\mathcal{C}$ définie par : $x \leq' y$ si, et seulement si, il existe $a \in \mathbb{Q}^{+*}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N \Longrightarrow y_n - x_n \geq a$. Vérifier qu'il s'agît d'une relation d'ordre sur $\mathcal{C}$ qui vérifie, de plus, la propriété suivante : $x \leq' y$ et $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$ implique $x' \leq' y'$.

6. Montrer que l'on définit une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ en posant, pour $X, Y \in \mathcal{C}/\mathcal{R}$, $X \leq Y$ si $X = Y$ ou bien si $x \leq' y$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$. On remarque que cet ordre prolonge celui de $\mathbb{Q}$ (indentifié à $I(\mathbb{Q})$). Montrer, de plus, que $X < Y$ si, et seulement si, il existe $(x, y) \in X \times Y$ tel que $x \leq' y$.

7. On montre que $\leq$ est un ordre total. Pour cela, prenons $X \neq Y$ dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ et des représentants $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ dans $\mathcal{C}$ de X et Y respectivement.

   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Q}^{+*}$ et une suite d'indices $(n_k)_k$ tels que, pour tout k, $|x_{n_k} - y_{n_k}| \geq a$.

   (b) Soit $\epsilon \in]0; a/3]$ (c'est un intervalle de $\mathbb{Q}$). Pour cet ϵ, traduire le fait que x et y sont de Cauchy et en déduire l'existence d'un k pour lequel $n \geq n_k$ implique $|y_n - x_n| \geq \epsilon$.

   (c) Conclure, grâce au 6, que $X < Y$ ou bien $Y < X$ (utiliser le signe de $x_{n_k} - y_{n_k}$).

8. On établit que l'ordre $\leq$ possède la propriété de simplification suivante : $\forall (X, Y, H) \in (\mathcal{C}/\mathcal{R})^3$, $X \leq Y$ implique $X + H \leq Y + H$. Pour ce faire, prenons $X < Y$ (pour $X = Y$, il n'y a rien à démontrer), H quelconque, et des représentants x, y, h de X, Y, H respectivement. Montrer que $X + H \leq Y + H$.

9. On note $(\mathcal{C}/\mathcal{R})^* = (\mathcal{C}/\mathcal{R}) \setminus \{0\}$ (0 désigne l'élément neutre de $\mathcal{C}/\mathcal{R}$) et par $(\mathcal{C}/\mathcal{R})^{+*}$ l'ensemble des éléments X de $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ vérifiant $X > 0$. En utilisant les propriétés de $\mathbb{Q}$, montrer que $(\mathcal{C}/\mathcal{R})^{+*}$ n'admet pas de plus petit élément.

10. On montre maintenant que $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ est archimédien. Soit $X, Y > 0$ dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$, représentés respectivement par x, y dans $\mathcal{C}$.

    (a) Montrer qu'il existe deux suites constantes a, b telles que $0 < A < X$ et $Y < B$, où A, B sont les classes de a et b respectivement.

    (b) Conclure en utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est archimédien.

11. Montrer que $\mathbb{Q}$ (plus précisemment $I(\mathbb{Q})$) est partout dense dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$.

12. Soit $x \in \mathcal{C}$ et $X \in \mathcal{C}/\mathcal{R}$ sa classe. On considère la suite $(X_n)_n \in (\mathcal{C}/\mathcal{R})^{\mathbb{N}}$ où, pour tout n, X_n est la classe dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ de la suite constante égale à x_n, notée $[x_n]$.

    (a) Soit $E > 0$ dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$. Trouver $\epsilon' \in \mathbb{Q}$ tel que $E > 2E' > 0$ dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$, où E' est la classe de ϵ'.

    (b) Trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, on ait, dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$, $-E' \leq X - X_n \leq E$.

    On a donc montré que $(X_n)_n$ converge vers X dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$. En voyant la suite de Cauchy x sur $\mathbb{Q}$ dans un autre ensemble, à savoir $\mathcal{C}/\mathcal{R}$, on lui a trouvé une limite dans cet ensemble.

13. On montre enfin que $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ est complet. Pour cela, considérons $(X_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$. On montre qu'elle converge dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$. Soit $(\epsilon_n)_n \in (\mathbb{Q}^{+*})^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0. On note par E_n la classe dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ de la suite constante égale à ϵ_n.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(G_n)_n \in (I(\mathbb{Q}))^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout n, $-E_n \leq G_n - X_n \leq E_n$.

(b) En déduire que $(G_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$. Pour tout n, soit $g_n \in \mathbb{Q}$ tel que $I(g_n) = G_n$. Montrer que $(g_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

(c) Soit X la classe dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ de la suite $(g_n)_n$. Montrer que $(X_n)_n$ converge vers X dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$.

Le groupe abélien complet $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ n'est autre que $\mathbb{R}$. On peut ensuite contruire une multiplication sur $\mathbb{R}$ qui prolonge celle de $\mathbb{Q}$ et qui fait de $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ un corps. Notons qu'il existe au moins une autre construction de $\mathbb{R}$ qui donne le "même résultat" dans le sens où le corps obtenu est "isomorphe" à $\mathcal{C}/\mathcal{R}$.

Propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On va voir ici quelques conséquences de la complétude de $\mathbb{R}$. Ces résultats, qui ne sont pas valables pour $\mathbb{Q}$, sont la principale motivation pour la construction de $\mathbb{R}$, ce qui explique que la construction précédente a été pensée de façon à garantir la complétude.
La première conséquence est la "propriété des segments emboités", la seconde celle de la borne supérieure.

1. Soit $(a_n)_n$ une suite croissante de réels, $(b_n)_n$ une suite décroissante de réels, de sorte que la différence $(b_n - a_n)_n$ soit une suite positive et tende vers 0.

   (a) Montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont des suites de Cauchy. On appelle A et B leurs limites respectives. Montrer que $A \leq B$.

   (b) Vérifier que A est la borne supérieure de $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ et que B est la borne inférieure de $\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$.

   (c) En déduire que $A = B$ et que l'ensemble $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n; b_n]$ est un singleton.

2. Soit $(a_n)_n$ une suite croissante majorée de réels. Montrer par l'absurde qu'elle est de Cauchy, donc convergente.

3. Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par b. Soit $a \in E$. On suppose que E n'admet pas de maximum (car sinon c'est évidemment la borne supérieure de E).

   (a) Construire par récurrence une suite $(a_n)_n$ d'éléments de E et une suite $(b_n)_n$ de majorants de E, vérifiant $a_0 = a$, $b_0 = b$, et la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

   $$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0; n]\!] \ , \ 2^i(b_i - a_i) \leq b_0 - a_0 \, .$$

   (b) Montrer que la suite $(b_n - a_n)_n$ converge vers 0.

   (c) D'après 2, $(a_n)_n$ converge vers un certain réel S. D'après 1, $(b_n)_n$ converge aussi vers S et on a $S = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n; n \in \mathbb{N}\}$. En déduire que S est la borne supérieure de E.